Г. П. АКИЛОВ · С. С. КУТАТЕЛАДЗЕ

УПОРЯДОЧЕННЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Г. П. АКИЛОВ, С. С. КУТАТЕЛАДЗЕ

УПОРЯДОЧЕННЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Ответственный редактор *В. А. Булавский*

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
Новосибирск · 1978

УДК 513.88+519.35

Книга посвящена теории упорядоченных векторных пространств — одному из наиболее актуальных разделов современного функционального анализа. В ней дается систематическое независимое изложение математического аппарата соответствий, упорядоченных множеств, пространств Канторовича и связанных с ними линейных операторов. Особое внимание уделено прикладным аспектам упорядоченных векторных пространств. В частности, впервые излагаются методы анализа многоцелевых экстремальных задач. Большое место отведено освещению последних достижений в области субдифференциального исчисления и граничной теории Шоке.

Монография ориентирована на широкий круг читателей, интересующихся анализом и его приложениями и, прежде всего, на специалистов по геометрии функциональных пространств, по теории экстремальных задач и математическому программированию, по теории потенциала и выпуклому анализу и по смежным с этими разделам анализа. Книга доступна также студентам старших курсов математических специальностей и может быть использована для первого знакомства с теорией упорядоченных векторных пространств.

А $\frac{20203-842}{055(02)-78}$ БЗ—4—1—78

ПРЕДИСЛОВИЕ

Тридцатые годы XX века — знаменательный период развития современной науки. В эти годы с особой силой проявилась наметившаяся еще в конце прошлого столетия тенденция к коренному переустройству всего математического знания. Именно тогда мысли передовых ученых о структуре математических объектов стали достоянием массы работающих математиков, что в конечном счете привело не только к логическому переосмыслению накопленного фактического материала, но и к созданию тех новых дисциплин, развитие которых стало задачей нового поколения.

К таким дисциплинам, несомненно, прежде всего следует отнести функциональный анализ — науку, в которой в наиболее полной и отчетливой форме осуществляется синтез концепций и представлений, полученных в результате исследования основных математических структур. Мы убеждены в том, что та все возрастающая уверенность в единстве математики, которое находит свое каждодневное отражение в унификации языка науки, не в малой мере основывается на широком распространении и развитии функционально-аналитических представлений. Язык анализа — вот то главное средство, с помощью которого совершается фундаментальный процесс математизации научного знания.

Последние десятилетия — пора зрелости, пора расцвета, пора сбора урожая во всех областях математики. Не случайно именно в это время решаются многие проблемы, выдвинутые в тридцатых годах, создаются новые математические дисциплины, всеобъемлющим становится распространение аналитических методов исследования в основных отраслях научной деятельности.

Ту же судьбу разделяет теория упорядоченных векторных пространств — по нашему мнению, один из наиболее актуальных и привлекательных разделов функционального анализа. Созданная в тридцатые годы усилиями группы выдающихся представителей ленинградской математической школы во главе с Л. В. Канторовичем, эта теория в своем развитии в полной мере продемонстрировала черты, характерные для общей эволюции аналитических представлений. Гибкость и разумность фундаментальных концепций, способность ассимилировать задачи и методы разнообразных дисциплин, умение вскрывать суть явлений, возникающих в конкретных задачах — вот те общие качества математики, которые ярко проявились уже на первом этапе развития теории упорядоченных векторных пространств.

Подобно тому, как возникновение функционального анализа связано со знаменитой монографией С. Банаха "Théorie des opération linéares", становление теории упорядоченных векторных пространств связано с фундаментальным трактатом Л. В. Канторовича, Б. З. Вулиха и А. Г. Пинскера «Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах».

К сожалению, указанные общие черты развития анализа и прежде всего универсальный характер аналитических средств, превращение анализа в единый язык непрерывной математики, имеют свои очевидные негативные стороны. Главная из них определяется безудержным ростом фактического материала во всех разделах анализа. Указанный рост привел к тому, что в настоящее время невозможно не только общее и достаточно полное изложение основ функционального анализа, но и обстоятельное описание положения дел в любом его содержательном разделе. Именно этой причиной объясняется появление большого числа хороших книг под названием «Функциональный анализ», обладающих тем печальным свойством, что мощность пересечения представленных в них материалов близка к нулю. Все это определяет название настоящей книги.

Что же касается фактического отбора представляемого читателю материала, то он обусловлен кругом личных интересов авторов, очерченным в последние годы. При этом особую роль сыграло наше стремление показать прикладной (в самом широком смысле этого слова) характер теории упорядоченных векторных пространств. По ряду причин субъективного характера нам близки проблемы новых направлений в математике, возникших в послевоенное время в связи с осмыслением проблем управления. Эти новые направления — теория экстремальных задач, математическая экономика, выпуклый анализ — по нашему глубокому убеждению, немыслимы вне теории упорядоченных векторных пространств. Обосновать эту точку зрения и призвана настоящая книга.

Мы старались тщательно (хотя, быть может, и тщетно) отобрать тот минимум сведений, который, с одной стороны, необходим для получения содержательных и важных приложений, а с другой стороны, достаточен для создания общего представления о теории упорядоченных векторных пространств и, надеемся, для ощущения прелести этой теории. Указанные обстоятельства и объем книги предопределили то, что вне рамок изложения остались топологические аспекты изучаемого предмета и, в частности, теория локально-выпуклых решеток. Иными словами, мы вынуждены были ограничиться алгебраическими аспектами теории. Этот грустный дефект лишь в малой степени компенсируется тем, что в избранных приложениях при этом удалось избежать существенной потери информации.

Книга состоит из двух частей. В первой полно и независимо излагаются основы теории упорядоченных векторных пространств. Основное место уделено описанию математического аппарата исследования упорядоченных множеств и векторных пространств, наделенных отношением порядка, согласованным с алгебраической структурой. Центральная тема первой части — теоремы о реализации таких пространств. При этом мы сочли возможным взять за методологическую основу далеко не традиционный аппарат теории соответствий и связанных с ними поляр, так как этот аппарат имеет значение, далеко выходящее за пределы затронутых в книге вопросов.

Вторая часть посвящена приложениям теории упорядоченных векторных пространств к актуальным проблемам выпуклого анализа. Здесь излагаются основы субдифференциального исчисления — нового аппарата локального исследования негладких операторов и элементарная теория многоцелевых экстремальных задач. Большое внимание уделено проблемам граничного поведения различных классов операторов — теории границ Шоке. Отбор именно этих прикладных тем определен как уже упомянутыми личными предпочтениями авторов, так и тем, что на этих задачах особенно отчетливо проявляются общие черты взаимодействия теории упорядоченных векторных пространств с другими дисциплинами. В частности, хотя задачи субдифференциального исчисления или задачи граничной теории возникают вне рамок упорядоченных векторных пространств, их осмысление и решение в настоящее время оказываются возможными только при помощи привлечения этой теории.

Мы надеемся, что предлагаемая монография удовлетворит интересы разнообразного контингента читателей. Ее можно использовать для первого знакомства как с теорией упорядоченных векторных пространств, так и с соответствующими приложениями — с математическим программированием, с теорией интегральных представлений Шоке, с теорией выпуклых операторов и т. п. Читатель, желающий продолжить знакомство с названными областями, найдет немало указаний в списке литературы, заключающем книгу. При этом для дальнейшего знакомства с теорией упорядоченных векторных пространств мы настоятельно рекомендуем монографию Б. З. Вулиха «Введение в теорию полуупорядоченных пространств». Углублять свои знания в области оптимальных задач следует по монографии «Теория экстремальных задач», написанной А. Д. Иоффе и В. М. Тихомировым.

Книга снабжена естественной системой внутренних ссылок. Отметим только, что цитируемые по названиям утверждения легко локализовать с помощью предметного указателя. Здесь же уместно подчеркнуть, что мы не сочли целесообразным загромождать текст указаниями приоритетного характера, так как начинающий ничего из них не извлечет, а специалисту подобные вопросы либо неинтересны вовсе, либо известны вместе с ответами. По тем же причинам в список литературы включены, как правило, только монографии и обзорные статьи, трактующие поднятые в основном тексте темы.

Глава 0

СООТВЕТСТВИЯ И УПОРЯДОЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА

В этой вспомогательной главе излагаются имеющие существенные приложения в дальнейшем элементы теории соответствий и упорядоченных множеств.

§ 1. СООТВЕТСТВИЯ

Нередко наряду с отображениями, сопоставляющими каждому элементу одного множества единственный элемент другого, целесообразно рассматривать и многозначные отображения, когда одному элементу отвечает несколько, вообще говоря, бесконечно много элементов. Такие многозначные отображения (мы будем называть их соответствиями) удобно трактовать как подмножества произведения данных множеств. Эта «геометрическая» интерпретация имеет помимо прочих то неоспоримое достоинство, что она дает возможность приписать формальный смысл самому понятию соответствия и, в частности, отображения. В этом параграфе, кроме элементарных понятий, связанных с определением соответствия, мы опишем имеющий большое применение в дальнейшем аппарат поляр.

0.1.1. Рассмотрим множества X и Y и подмножество Φ произведения $X \times Y$. Тройку (Φ, X, Y) называют *соответствием* из X (*области отправления*) в множество Y (*область прибытия*)[1].
Имеет место следующий факт.

---

[1] Обычно, допуская вольность, говорят просто о соответствии Φ, лишь подразумевая его область отправления и область прибытия.

I. *Пусть* (Φ, X, Y) — *соответствие. Существуют единственные множества* D *и* R *такие, что* $\Phi\subset D\times R$ *и обладающие, кроме того, тем свойством, что если множества* A *и* B *таковы, что* $\Phi\subset A\times B$, *то* $D\subset A$, $R\subset B$.

Действительно, множество D можно определить как совокупность всех таких элементов $x\in X$, что при некотором $y\in Y$ будет $(x, y)\in\Phi$. Определив аналогично множество R, без труда докажем, что множества D и R удовлетворяют всем требованиям предложения и единственны.

Множество D называется *областью определения* соответствия Φ, а множество R — *областью значений* (в обозначениях $D=D(\Phi)$, $R=R(\Phi)$).

Если область отправления X соответствия Φ совпадает с его областью определения, то тот факт, что Φ есть соответствие из X в Y записывают обычно так: $\Phi: X\longrightarrow Y$.

Соответствие (Ψ, U, V) называется *сужением* соответствия (Φ, X, Y), если $U\subset X$, $V\subset Y$, $\Psi\subset\Phi$. Ясно, что при этом $D(\Psi)\subset D(\Phi)$, $R(\Psi)\subset R(\Phi)$.

Пусть A — произвольное множество и (Φ, X, Y) — соответствие. Положим $\Phi|_A = \Phi\cap(A\times Y)$. Рассматриваемое как соответствие из X в Y множество $\Phi|_A$ называется *сужением* (или *ограничением*) соответствия Φ на A. Область значений соответствия $\Phi|_A$ называется *образом множества* A (при соответствии Φ) и обозначается символом $\Phi[A]$; если при этом A состоит из единственного элемента x, т. е. $A=\{x\}$, то вместо $\Phi[\{x\}]$ пишут просто $\Phi[x]$ и называют это множество *образом элемента* x[2].

Очевидно, образ $\Phi[A]$ состоит из всех таких $y\in Y$, что в A существует элемент x, который в паре с y входит в Φ. В частности, соотношение $y\in\Phi[x]$ равносильно включению $(x, y)\in\Phi$.

Из сказанного вытекает, что если множество A_1 содержится в множестве A_2, то $\Phi[A_1]\subset\Phi[A_2]$. Далее, для произвольного семейства $\{A_\xi\}$ $(\xi\in\Xi)$ множеств

$$\Phi\left[\bigcup_{\xi\in\Xi} A_\xi\right] = \bigcup_{\xi\in\Xi}\Phi[A_\xi], \quad \Phi\left[\bigcap_{\xi\in\Xi} A_\xi\right]\subset\bigcap_{\xi\in\Xi}\Phi[A_\xi]. \qquad (1)$$

[2] Для обозначения образа элемента x при соответствии Φ часто используется и сокращенная запись Φx.

В частности,

$$\Phi[A] = \bigcup_{x\in A} \Phi[x]. \tag{2}$$

Понятно также, что

$$\Phi[A] = \Phi[A \cap D(\Phi)]. \tag{3}$$

Из (3) следует, что образ $\Phi[A]$ множества A непуст тогда и только тогда, когда пересечение $A \cap D(\Phi) \neq \varnothing$. Тем самым

$$D(\Phi) = \{x \in X : \Phi[x] \neq \varnothing\}. \tag{4}$$

Наряду с данным соответствием рассмотрим еще соответствие (Ψ, U, V). Отметим очевидный факт.

II. *Для того чтобы соответствие* (Ψ, U, V) *было сужением соответствия* (Φ, X, Y), *необходимо и достаточно, чтобы было* $U \subset X$, $V \subset Y$ *и для любого* x *выполнялось*

$$\Psi[x] \subset \Phi[x]. \tag{5}$$

Заметим, что, учитывая соотношение (4), можно ограничиться проверкой условия (5) лишь для $x \in D(\Psi)$, поскольку если $x \overline{\in} D(\Psi)$, то $\Psi[x] = \varnothing$, и (5) выполнено, каково бы ни было Φ.

Предложение II приводит к следующему результату.

III. *Для того чтобы соответствия* (Ψ, U, V) *и* (Φ, X, Y) *совпадали, необходимо и достаточно, чтобы* $U = X$, $V = Y$ *и для любого* x *выполнялось*

$$\Psi[x] = \Phi[x]. \tag{6}$$

Таким образом, задание соответствия (Φ, X, Y) равносильно указанию множеств X и Y и семейства $\{\Phi[x]\}$ $(x \in X)$ подмножеств множества Y. Это дает повод отождествлять данное соответствие с отображением, сопоставляющим элементу $x \in X$ множество $\Phi[x]$, т. е. $\Phi : x \longrightarrow \Phi[x]$.

Соответствие (Φ, X, Y) называется *однозначным*, если образ $\Phi[x]$ любого элемента x состоит не более чем из одного элемента. Поскольку для $x \in D(\Phi)$ множество $\Phi[x]$ непусто, то в случае однозначности соответствия

Φ это множество содержит в точности один элемент, который называется *значением соответствия* Φ (отвечающим данному x) и обозначается через $\Phi(x)$, т. е. $\Phi[x]=\{\Phi(x)\}$ $(x\in D(\Phi))$. Однозначное соответствие Φ мы будем отождествлять с отображением, сопоставляющим элементу $x\in D(\Phi)$ отвечающее ему значение $\Phi(x)$, так что $\Phi: x\longrightarrow\Phi(x)$ $(x\in D(\Phi))$.

0.1.2. Рассмотрим соответствия (Φ, X, Y) и (Ψ, U, V). Образуем множество $\Psi\circ\Phi$ всех таких пар $(x, v)\in X\times V$, что для каждой из них можно подобрать элемент z так, что $(x, z)\in\Phi$, $(z, v)\in\Psi$. Соответствие $(\Psi\circ\Phi, X, V)$ называется *суперпозицией* данных соответствий.

I. *Если A — какое-либо множество, то*

$$(\Psi\circ\Phi)[A]=\Psi[\Phi[A]]. \tag{7}$$

Действительно, соотношение $v\in(\Psi\circ\Phi)[A]$ означает, существуют элементы $x\in A$ и z такие, что $(x, z)\in\Phi$, $(z, v)\in\Psi$, это, в свою очередь, равносильно включениям $z\in\Phi[A]$, $(z, v)\in\Psi$, т. е. включению $v\in\Psi[\Phi[A]]$.

Из (7) получаем для произвольного x соотношение (ср. (6))

$$(\Psi\circ\Phi)[x]=\Psi[\Phi[x]]. \tag{8}$$

Таким образом, если соответствия Φ и Ψ однозначны, то данное выше определение суперпозиции совпадает с обычным.

Суперпозиция соответствий обладает свойством ассоциативности. Именно, если наряду с соответствиями Φ и Ψ рассмотреть еще соответствие (Θ, Z, W), то ввиду (8)

$$\Theta\circ(\Psi\circ\Phi)=(\Theta\circ\Psi)\circ\Phi. \tag{9}$$

Заметим, что множество $\Theta\circ\Psi\circ\Phi$ (ввиду (9) указывать «порядок действий» нет необходимости) состоит из всех таких пар (x, w), что существуют элементы u и v, обладающие свойством: $(x, u)\in\Phi$, $(u, v)\in\Psi$, $(v, w)\in\Theta$.

0.1.3. Пусть дано соответствие (Φ, X, Y). Обозначим

$$\Phi^{-1}=\{(y, x)\in Y\times X: (x, y)\in\Phi\}.$$

Соответствие (Φ^{-1}, Y, X) называется *обратным* по отношению к данному.

Непосредственно из определения вытекает, что $D(\Phi)=R(\Phi)$, $R(\Phi^{-1})=D(\Phi)$.

Если B — какое-либо множество, то его образ $\Phi^{-1}[B]$ при соответствии Φ^{-1} называется *прообразом множества* B при данном соответствии Φ. Согласно сказанному в 1.1 соотношение $x\in\Phi^{-1}[B]$ равносильно существованию такого $y\in B$, что $(y, x)\in\Phi^{-1}$, т. е. $(x, y)\in\Phi$. В частности если Φ однозначно, последнее включение означает, что $x\in D(\Phi)$ и $y=\Phi(x)$. Поэтому в рассматриваемом случае прообраз $\Phi^{-1}[B]$ состоит из всех таких $x\in D(\Phi)$, что $\Phi(x)\in B$.

Не перечисляя свойств прообраза, отметим лишь в дополнение к (1) и (2).

I. *Если соответствие* Φ *однозначно и* $\{B_\xi\}$ $(\xi\in\Xi)$ *непустое семейство множеств, то*

$$\Phi^{-1}\left[\bigcap_{\xi\in\Xi} B_\xi\right]=\bigcap_{\xi\in\Xi}\Phi^{-1}[B_\xi]. \tag{10}$$

Если Θ есть суперпозиция соответствий Φ и Ψ, т. е. $\Theta=\Psi\circ\Phi$, то непосредственно из определения вытекает, что $\Theta^{-1}=\Phi^{-1}\circ\Psi^{-1}$. Отсюда с помощью (7) получаем для произвольного множества B

$$(\Psi\circ\Phi)^{-1}[B]=\Phi^{-1}[\Psi^{-1}[B]]. \tag{11}$$

Рассмотрим соответствие (Φ, X, Y) и обозначим через I_A (A — произвольное данное множество) совокупность всех пар вида (x, x) с $x\in A$. Таким образом, I_A есть тождественное отображение множества A на себя. Так как для каждого $x\in D(\Phi)$ существует y такой, что $(x, y)\in\Phi$ и, стало быть, $(y, x)\in\Phi^{-1}$, то

$$\Phi^{-1}\circ\Phi\supset I_{D(\Phi)}. \tag{12}$$

Если соответствие Φ^{-1} однозначно, то в (12) имеет место знак равенства, поскольку из соотношений $(x, z)\in\Phi$, $(z, y)\in\Phi^{-1}$ вытекает, что $x, y\in\Phi^{-1}[z]$, так что $x=y$, или, иначе, $(x, y)\in I_{D(\Phi)}$.

Соответствие (Φ, X, Y) называется *взаимно-однозначным*, если однозначно как само Φ, так и обратное соответствие Φ^{-1}. Согласно сказанному выше для взаимно-однозначного соответствия будет $\Phi_{-1} \circ \Phi = I_{D(\Phi)}$. Справедливо и обратное.

II. *Если* Φ — *однозначное соответствие и существует соответствие* Ψ *такое, что*

$$\Psi \circ \Phi = I_{D(\Phi)}, \tag{13}$$

то Φ *взаимно-однозначно. При этом* $\Phi^{-1} = \Psi|_{R(\Phi)}$.

В самом деле, возьмем произвольный элемент $y \in D(\Phi^{-1}) = R(\Phi)$ и пусть $x_1, x_2 \in \Phi^{-1}[y]$. Согласно (13) множество $\Psi[\Phi[x_i]]$ $(i=1, 2)$ состоит из единственного элемента x_i. Но поскольку $\Phi(x_1) = \Phi(x_2) = y$, а $\Psi[\Phi[x_i]] = \Psi[y]$ $(i=1, 2)$, то $x_1 = x_2$. Отсюда же получаем, что $\Phi^{-1}[y] = \Psi[y]$.

В заключение отметим такой полезный во многих случаях факт.

III. *Пусть* Φ, Ψ, Θ — *соответствия. Справедливо соотношение*

$$\Theta \circ \Psi \circ \Phi = \bigcup_{(u,v) \in \Psi} \left(\Phi^{-1}[u] \times \Theta[v]\right). \tag{14}$$

Действительно, как отмечалось в **1.2**, включение $(x, w) \in \Theta \circ \Psi \circ \Phi$ означает существование таких элементов u, v, что $(x, u) \in \Phi$, $(u, v) \in \Psi$, $(v, w) \in \Theta$, что можно записать в виде $x \in \Phi^{-1}[u]$, $w \in \Theta[v]$, $(u, v) \in \Psi$, или, иначе, в виде $(x, w) \in \Phi^{-1}[u] \times \Theta[v]$, $(u, v) \in \Psi$. Отсюда и вытекает (14).

Если в (14) в качестве Ψ взять $I_{R(\Phi)}$, то, поскольку $I_{R(\Phi)} \circ \Phi = \Phi$, можем написать:

$$\Theta \circ \Phi = \bigcup_{u \in R(\Phi)} \left(\Phi^{-1}[u] \times \Theta[u]\right). \tag{15}$$

0.1.4. Соотнося множеству A его образ при данном соответствии, а множеству $B \subset R(\Phi)$ — его прообраз $\Phi^{-1}[B]$, мы установим тем самым определенные связи между подмножествами области определения и области значений данного соответствия. Более тонкие связи возникают, однако, в связи с понятием поляры.

Рассмотрим соответствие (Φ, X, Y). *Полярой* множества $A \subset X$ (относительно соответствия Φ) называется множество

$$\pi_\Phi(A) = \{y \in Y : A \times \{y\} \subset \Phi\} = \{y \in Y : \Phi^{-1}[y] \supset A\}.$$

Таким образом, поляра $\pi_\Phi(A)$ — это множество всех таких $y \in Y$, что для каждого $x \in A$ будет $(x, y) \in \Phi$[3].

Остановимся на свойствах поляры. При этом, поскольку соответствие Φ будет фиксировано, мы не будем упоминать его в обозначении, заменяя символ $\pi_\Phi(A)$ более простым — $\pi(A)$. Кроме того, если $A = \{x\}$, то вместо $\pi(A)$ будем писать: $\pi(x)$.

Непосредственно из определения вытекает, что

$$\pi(x) = \Phi[x] \qquad (x \in X); \tag{16}$$

$$\pi(A) = \bigcap_{x \in A} \pi(x) = \bigcap_{x \in A} \Phi[x] \quad (A \subset X). \tag{17}$$

Поэтому если множество A есть объединение семейства $\{A_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ подмножеств множества X, то

$$\pi(A) = \pi\left(\bigcup_{\xi \in \Xi} A_\xi\right) = \bigcap_{x \in A} \pi(x) = \bigcap_{\xi \in \Xi}\left(\bigcap_{x \in A_\xi} \pi(x)\right) = \\ = \bigcap_{\xi \in \Xi} \pi(A_\xi). \tag{18}$$

Из (17) или прямо на основе определения выводим

I. *Если* $A_1 \subset A_2 \subset X$, *то* $\pi(A_1) \supset \pi(A_2)$.

Если одновременно с соответствием Φ рассматривать и обратное по отношению к нему соответствие Φ^{-1}, то наряду с полярой $\pi(A) = \pi_\Phi(A)$ множества $A \subset X$ можно говорить и о поляре $\pi^{-1}(B) = \pi_{\Phi^{-1}}(B)$ множества $B \subset Y$, которую мы будем называть *обратной* по отношению к данной. Из определения поляры вытекает

II. *Если множества* $A \subset X$ *и* $B \subset Y$ *таковы, что* $A \times B \subset \Phi$, *то* $B \subset \pi(A)$, $A \subset \pi^{-1}(B)$.

Используя этот факт, получаем

III. *Каковы бы ни были множества* $A \subset X$ *и* $B \subset Y$, *имеем*

$$A \subset \pi^{-1}(\pi(A)), \qquad B \subset \pi(\pi^{-1}(B)). \tag{19}$$

Действительно, из определения поляры следует, что $A \times \pi(A) \subset \Phi$ и аналогично $\pi^{-1}(B) \times B \subset \Phi$.

---

[3] В определении поляры $\pi_\Phi(A)$ можно было бы и не предполагать заранее, что $A \subset X$. Однако если $A \setminus D(\Phi) \neq \varnothing$, то, очевидно, $\pi_\Phi(A) = \varnothing$, так что указанное обобщение оказывается малосодержательным.

Разумеется, далеко не всякое множество $A\subset X$ служит полярой (относительно соответствия Φ^{-1}) какого-либо множества $B\subset Y$. В связи с этим представляет интерес следующая теорема.

Теорема 1(1.0). *Пусть A — подмножество множества X. Для того чтобы существовало такое множество $B\subset Y$, что $A=\pi^{-1}(B)$, необходимо и достаточно, чтобы для каждого элемента $x\in X$, который не принадлежит множеству A, можно было бы указать такой элемент $y_0\in Y$, что*

$$\pi^{-1}(y_0)\supset A, \quad x\in\pi^{-1}(y_0). \tag{20}$$

Если указанное условие выполнено, то $A=\pi^{-1}(\pi(A))$.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что множество B с указанными свойствами существует. Возьмем $x\in X\setminus A$. Так как $x\in A=\pi^{-1}(B)$, то $(\{x\}\times B)\setminus\Phi\neq\varnothing$, так что найдется $y_0\in B$ такой, что $(x, y_0)\in\Phi$. Ясно, что $x\in\Phi^{-1}[y_0]=\pi^{-1}(y_0)$. Вместе с тем условие $y_0\in B$ в силу предложения I влечет включение $\pi^{-1}(y_0)\supset\pi^{-1}(B)=A$. Таким образом, элемент y_0 удовлетворяет обоим соотношениям (20).

Достаточность. Допустим теперь, что соблюдено условие теоремы. Докажем, что тогда $A=\pi^{-1}(\pi(A))$ и, следовательно, можно принять $B=\pi(A)$. Согласно предложению II $A\subset\pi^{-1}(\pi(A))$. Пусть $x\in\pi^{-1}(\pi(A))$. Если бы оказалось, что $x\in A$, то по условию мы нашли бы $y_0\in Y$ так, что выполнено (20). В частности, снова, привлекая предложение II и учитывая результат предложения I, имели бы $y_0\in\pi(\pi^{-1}(y_0))\subset\pi(A)$, так что можно было бы написать (предложение I) $\pi^{-1}(y_0)\supset\pi^{-1}(\pi(A))$, что противоречит соотношению $x\in\pi^{-1}(\pi(A))$.

Теорема полностью доказана.

0,1,5. Сохраняя предположения и обозначения предыдущего пункта, рассмотрим множество $H\subset X$. Оно называется *Ф-компонентой* (или, если это не может вызвать недоразумений, просто *компонентой*), если $H=\pi^{-1}(\pi(H))$. Как вытекает из теоремы 1 множество H будет компонентой тогда и только тогда, когда существует множество $B\subset Y$ такое, что $H=\pi^{-1}(B)$. С помощью этого замечания получаем

I. *Пусть A — подмножество множества X. Множество $H_0=\pi^{-1}(\pi(A))$ является наименьшей компонентой, содержащей A.*

Действительно, как только что отмечалось, H_0 — компонента, причем в силу предложения II из 1.4 содержащая A. Если H — какая-либо компонента, содержащая множество A, то, дважды применяя предложение I из 1.4, можем написать: $H=\pi^{-1}(\pi(H))\supset\pi^{-1}(\pi(A))=H_0$.

В случаях, когда это не может вызвать недоразумений, будем обозначать наименьшую компоненту, содержащую данное множество A, через $\tilde{A}$. Таким образом, $\tilde{A}=\pi^{-1}(\pi(A))$.

II. *Пересечение любой совокупности компонент само является компонентой.*

В самом деле, пусть $\mathfrak{H}$ — данная совокупность компонент. Согласно (18) имеем

$$\bigcap_{H\in\mathfrak{H}} H = \bigcap_{H\in\mathfrak{H}} \pi^{-1}(\pi(H)) = \pi^{-1}\left(\bigcup_{H\in\mathfrak{H}} \pi(H)\right).$$

Отметим что множество X, будучи полярой к пустому множеству, является компонентой, очевидно, наибольшей. Множество $Z=\pi^{-1}(Y)$ служит наименьшей компонентой (предложение I из 1,4). Иногда эту компоненту называют *центром.*

Пусть H — это Φ-компонента. Множество $K=\pi(H)$ будет Φ^{-1}-компонентой, которая называется *дополнением компоненты* H. Так как при этом $H=\pi^{-1}(\pi(H))=$ $=\pi^{-1}(K)$, то H оказывается дополнением Φ^{-1}-компоненты K (разумеется, при этом надлежит заменить Φ на Φ^{-1}). Сопоставляя Φ-компоненте H ее дополнение $H'=$ $=\pi(H)$, получим в силу сказанного отображение множества $\mathfrak{K}_\Phi(X)$ всех Φ-компонент на множество $\mathfrak{K}_{\Phi-1}(Y)$ всех Φ^{-1}-компонент. Это отображение взаимно-однозначно, поскольку из равенства $\pi(H_1)=\pi(H_2)$ $(H_1, H_2\in$ $\in\mathfrak{K}_\Phi(X))$ вытекает $H_1=\pi^{-1}(\pi(H_1))=\pi^{-1}(\pi(H_2))=H_2$.

Обозначая через H' дополнение Φ-компоненты H, рассмотрим множество $\mathfrak{H}$ из Φ-компонент. Справедливо соотношение

$$\left(\bigcap_{H\in\mathfrak{H}} H\right)' = \widetilde{\bigcup_{H\in\mathfrak{H}} H'}; \quad \left(\widetilde{\bigcup_{H\in\mathfrak{H}} H}\right)' = \bigcap_{H\in\mathfrak{H}} H'. \qquad (21)$$

Действительно,

$$\left(\bigcap_{H\in\mathfrak{H}} H\right)' = \pi\left(\bigcap_{H\in\mathfrak{H}} H\right) = \pi\left(\bigcap_{H\in\mathfrak{H}} \pi^{-1}(\pi(H))\right) =$$

$$= \pi\left(\pi^{-1}\left(\bigcup_{H\in\mathfrak{H}} H'\right)\right) = \widetilde{\bigcup_{H\in\mathfrak{H}} H'}.$$

Второе из равенств (21) доказывается аналогично.

0.1.6. Исходя из соответствия (Φ, X, Y), образуем множество $\mathfrak{K}_\Phi(X)$ всех Φ-компонент. Компонента H называется *главной*, если существует такой элемент $x\in X$, что $H=\widetilde{\{x\}}=\pi^{-1}(\pi(x))$. Если множество X — наибольшая компонента — является главной компонентой, то элемент, ее порождающий, называется *единицей*.

Сопоставляя элементу $x\in X$ порожденную им главную компоненту $\widetilde{\{x\}}=\pi^{-1}(\pi(x))$, получим отображение множества X в множество $\mathfrak{K}_\Phi(X)$ всех компонент, которое называется *каноническим*.

Пусть, кроме данного соответствия, имеется еще соответствие (Ψ, U, V). Обозначим $\mathfrak{X}=\mathfrak{K}_\Phi(X)$, $\mathfrak{A}=\mathfrak{K}_\Psi(U)$.

Предположим, что имеется отображение f множества X в множество U. Оно порождает отображение $\bar f$ множества $\mathfrak{X}$ в множество $\mathfrak{A}$, действующее по правилу

$$\bar f: H \to \widetilde{f[H]} = \pi_{\Psi^{-1}}(\pi_\Psi(f[H])) \quad (H\in\mathfrak{X}). \tag{22}$$

Обозначив через φ и соответственно через ψ каноническое отображение множества X в множество $\mathfrak{X}$ или соответственно множества U в множество $\mathfrak{A}$, рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & U \\ \downarrow\varphi & & \downarrow\psi \\ \mathfrak{X} & \xrightarrow{\bar f} & \mathfrak{A} \end{array} \tag{23}$$

Если она коммутативна, т. е. если $\psi\circ f=\bar f\circ\varphi$, то отображение $\bar f$ называется *снижением* данного отображения f. При этом говорят, что f допускает снижение $\bar f$. Поскольку Ψ-компонента $K=\bar f(\varphi(x))$ в силу (22) совпадает с $\widetilde{f[\widetilde{\{x\}}]}$, а Ψ-компонента $K_0=\psi(f(x))$ тождественна с $\widetilde{f(x)}$, то коммутативность диаграммы (23) означает, что $\widetilde{\{f(x)\}}=\widetilde{f[\widetilde{\{x\}}]}$ для любого $x\in X$. Так как для каждого

$x \in X$ будет $x \in \widetilde{\{x\}}$ и, следовательно, $f(x) \in f[\widetilde{\{x\}}]$, то всегда $\widetilde{\{f(x)\}} \subset f[\widetilde{\{x\}}]$. Отсюда получаем

I. *Для того чтобы отображение f допускало снижение, необходимо и достаточно, чтобы для любого $x \in X$ было*

$$f[\widetilde{\{x\}}] \subset \widetilde{\{f(x)\}}. \tag{24}$$

0.1.7. Рассмотрим опять два соответствия (Φ, X, Y) и (Ψ, U, V) и образуем новое соответствие $(\Phi \otimes \Psi, X \times U, Y \times V)$, полагая

$$\Phi \otimes \Psi = \{(x, u, y, v) \in X \times U \times Y \times V : (x, y) \in \Phi, (u, v) \in \Psi\}.$$

Компоненты множества $X \times U$ (при соответствии $\Phi \otimes \Psi$) суть произведения компонент множества X (при соответствии Φ) и компонент множества U (при соответствии Ψ). Именно

I. *Для того чтобы множество $L \subset X \times U$ было компонентой множества $X \times U$ при соответствии $\Phi \otimes \Psi$, необходимо и достаточно, чтобы его можно было представить в виде $L = H \times K$, где $H \in \mathfrak{K}_{\Phi}(X)$, $K \in \mathfrak{K}_{\Psi}(U)$.*

Действительно, если $B \subset Y$ и $C \subset V$ — непустые множества, то

$$\pi_{\Phi \otimes \Psi}^{-1}(B \times C) = \{(x, u) \in X \times U : (x, y) \in \Phi, \ (u, v) \in \Psi \\ (y \in B, v \in C)\} = \pi_{\Phi}^{-1}(B) \times \pi_{\Psi}^{-1}(C);$$

это соотношение тривиальным образом справедливо и в случае $B = C = \varnothing$.

Взяв компоненты $H \in \mathfrak{K}_{\Phi}(X)$ и $K \in \mathfrak{K}_{\Psi}(U)$ и приняв $B = \pi_{\Phi}(H)$, $C = \pi_{\Psi}(K)$, можем написать: $H \times K = \pi_{\Phi \otimes \Psi}^{-1}(B \times C) \in \mathfrak{K}_{\Phi \otimes \Psi}(X \times U)$ — условия предложения достаточны.

Рассмотрим теперь компоненту $L \in \mathfrak{K}_{\Phi \otimes \Psi}(X \times U)$. Положим $\Theta = \pi_{\Phi \otimes \Psi}(L)$. Имеем

$$L = \pi_{\Phi \otimes \Psi}^{-1}(\Theta) = \{(x, u) \in X \times U : (x, y) \in \Phi, \\ (u, v) \in \Psi \quad ((y, v) \in \Theta)\}.$$

Пусть пара $(x, u) \in L$, а y — произвольный элемент из Y. Каково бы ни было $v \in \Theta[y]$, должно быть $(u, v) \in \Psi$.

Поэтому $u \in \pi_\Psi^{-1}(\Theta[y])$. Ввиду произвольности y в соответствии с (17)

$$u \in \bigcap_{y \in Y} \pi_\Psi^{-1}(\Theta[y]) = \pi_\Psi^{-1}\left(\bigcup_{y \in Y} \Theta[y]\right) = \pi_\Psi^{-1}(R(\Theta)).$$

Аналогично докажем, что $x \in \pi_\Phi^{-1}(D(\Theta))$. Таким образом, $L \subset \pi_\Phi^{-1}(D(\Theta)) \times \pi_\Psi^{-1}(R(\Theta))$. Но из соотношения $\Theta \subset \subset D(\Theta) \times R(\Theta)$ вытекает, что

$$L = \pi_{\Phi \otimes \Psi}^{-1}(\Theta) \supset \pi_{\Phi \otimes \Psi}^{-1}(D(\Theta) \times R(\Theta)) =$$
$$= \pi_\Phi^{-1}(D(\Theta)) \times \pi_\Psi^{-1}(R(\Theta)).$$

Остается заметить, что $\pi_\Phi^{-1}(D(\Theta)) \in \mathfrak{K}_\Phi(X)$, $\pi_\Psi^{-1}(R(\Theta)) \in \in \mathfrak{K}_\Psi(U)$.

0,1,8. Рассмотрим соответствие (Φ, X, Y). Предположим еще, что даны множества U, V и отображения: f — множества U в множество X и g — множества V в множество Y. Введем соответствие $\Psi = g^{-1} \circ \Phi \circ f$ (из U в V). Так как согласно (14) $\Psi = g^{-1} \circ \Phi \circ f = \bigcup_{(x, y) \in \Phi} (f^{-1}[x] \times \times g^{-1}[y])$, то включение $(u, v) \in \Psi$ означает, что $(f(u), f(v)) \in \Phi$.

Возьмем множество $C \subset U$. В силу (17) и (10)

$$\pi_\Psi(C) = \bigcap_{u \in C} \Psi[u] = \bigcap_{u \in C} g^{-1}[\Phi[f[u]]] =$$
$$= g^{-1}\left[\bigcap_{u \in C} \pi_\Phi(f[u])\right] = g^{-1}\left[\pi_\Phi\left(\bigcup_{u \in C} f[u]\right)\right] =$$
$$= g^{-1}[\pi_\Phi(f[C])]. \tag{25}$$

Поскольку $\Psi^{-1} = f^{-1} \circ \Phi^{-1} \circ g$, то аналогичное (25) соотношение имеет место и для обратных поляр:

$$\pi_\Psi^{-1}(D) = f^{-1}\left[\pi_\Phi^{-1}(g[D])\right] \quad (D \subset V). \tag{26}$$

Предположим дополнительно, что g отображает V на все Y, т. е. что $R(g) = Y$. В этом предположении для множества $C \subset U$ имеем, учитывая (25) и (26),

$$\widetilde{C} = \pi_{\Psi}^{-1}(\pi_{\Psi}(C)) = \pi_{\Psi}^{-1}\left(g^{-1}[\pi_{\Phi}(f[C])]\right) =$$
$$= f^{-1}\left[\pi_{\Phi}^{-1}(g[g^{-1}[\pi_{\Phi}(f[C])]])\right] = f^{-1}\left[\pi_{\Phi}^{-1}(\pi_{\Phi}(f[C]))\right] =$$
$$= f^{-1}[\widetilde{f[C]}]. \qquad (27)$$

Выведенные соотношения позволяют доказать следующий факт.

I. *Если область значений отображения g совпадает с Y, то множество $K \subset U$ является Ψ-компонентой тогда и только тогда, когда существует такая Φ-компонента H, что $K = f^{-1}[H]$.*

Действительно, если $K \in \mathfrak{K}_{\Psi}(U)$, то найдется такое множество $D \subset V$, что $K = \pi_{\Psi}^{-1}(D)$. Ввиду (26) множество $H = \pi_{\Phi}^{-1}(g[D])$ удовлетворяет условию $K = f^{-1}[H]$ и остается заметить, что $H \in \mathfrak{K}_{\Phi}(X)$.

Пусть теперь H — произвольная Φ-компонента. Полагая в (27) $C = f^{-1}[H]$, получим $\widetilde{f^{-1}[H]} = f^{-1}[\widetilde{f[f^{-1}[H]]}] \subset f^{-1}[\widetilde{H}] = f^{-1}[H]$, откуда и следует, что $f^{-1}[H] \in \mathfrak{K}_{\Psi}(U)$.

0.1.9. Соответствие (Φ, X, X) называется *отношением дизъюнктности* (в множестве X), если выполняется

(1) Соответствие Φ симметрично, т. е. $\Phi^{-1} = \Phi$.

(2) $I_X \cap \Phi \subset Z^2$ ($Z = \pi_{\Phi}(X)$ — наименьшая Φ-компонента).

(3) Если элементы $x, y \in X$ таковы, что $\widetilde{\{x\}} \cap \widetilde{\{y\}} = Z$, то $(x, y) \in \Phi$.

Если Φ — отношение дизъюнктности, то об элементах $x, y \in X$, удовлетворяющих соотношению $(x, y) \in \Phi$, говорят, что они *дизъюнктны*. При этом пишут $x d y$. Используют также символы $x d A$, $A d B$ ($x \in X$; $A, B \subset X$), которые не нуждаются в истолковании.

Ввиду симметрии отношения дизъюнктности Φ множества всех Φ-компонент и всех Φ^{-1}-компонент тождественны. По этой же причине совпадают понятия поляры и обратной поляры.

Если $A \subset X$, то компонента $\pi(A)$ называется *дизъюнктным дополнением* множества A и обозначается символом A^d. Таким образом, $\widetilde{A} = A^{dd}$.

Множество $\mathfrak{X} = \mathfrak{K}_{\Phi}(X)$ всех компонент (относительно данного отношения дизъюнктности (Φ, X, X)) характеризуется следующими свойствами.

Теорема 2(1.0). *Пусть $H\in\mathfrak{X}$. Тогда*

(1) $H\cap H^d=Z$.

(2) $\widetilde{H\cup H^d}=X$.

(3) *Если $K\in\mathfrak{X}$, то соотношения $H\cap K\subset Z$ и $K\subset H^d$ эквивалентны.*

Доказательство. (1). Если $x\in H\cap H^d$, то xdx и согласно условию (2) определения $x\in Z$.

(2). На основании (21) имеем $\widetilde{H\cup H^d}^{d}=H^d\cap H^{dd}=$ $=H^d\cap H=Z$, так что $\widetilde{H\cup H^d}=Z^d=X$.

(3). Предположим, что $\widetilde{H}\cup K=Z\,(K\in\mathfrak{X})$. Если $x\in H$, $y\in K$, то $\widetilde{\{x\}}\subset H$, $\widetilde{\{y\}}\subset K$, поэтому $Z\subset\widetilde{\{x\}}\cap\widetilde{\{y\}}\subset$ $\subset H\cap K=Z$, и в силу третьего условия определения должно быть xdy. Отсюда на основании предложения II из 1.4 заключаем, что $K\subset H^d$.

Если дано, что $K\subset H^d$ $(K\in\mathfrak{X})$, то в соответствии с пунктом 1 $Z\subset H\cap K\subset H\cap H^d=Z$. Следовательно, $H\cap K=Z$.

Следствие 1. *Если множества A, $B\subset X$ таковы, что AdB, то и $\widetilde{A}d\widetilde{B}$.*

Действительно, на основании предложения II из 1.4 $A\subset B^d$, а тогда и $\widetilde{A}\subset B^d=(B^d)^{dd}=(B^{dd})^d=(\widetilde{B})^d$.

Следствие 2. *Пусть φ — каноническое отображение множества X в множество $\mathfrak{X}$. Соотношения xdy $(x, y\in X)$ и $\varphi(x)\cap\varphi(y)=Z$ эквивалентны.*

Предположим, что, кроме множества X, имеется еще множество U и отображение f множества U на X.

I. *Если Φ — отношение дизъюнктности в множестве X, то $\Psi=f^{-1}\circ\Phi\circ f$ — отношение дизъюнктности в множестве U.*

В самом деле, $\Psi^{-1}=f^{-1}\circ\Phi^{-1}\circ f=f^{-1}\circ\Phi\circ f=\Psi$. Далее, если $(u, u)\in\Psi$, то, как отмечалось в 1.8, $(f(u), f(u))\in$ $\in\Phi$. Следовательно, $f(u)\in Z\subset\pi_\Phi(X)$. Но тогда согласно (25) $u\in f^{-1}[\pi_\Phi(X)]=f^{-1}[\pi_\Phi(f[U])]=\pi_\Psi(U)=W$. Если, наконец, элементы u, $v\in U$ таковы, что $\widetilde{\{u\}}\cap\widetilde{\{v\}}=W$, то, учитывая (27), можем написать:

$$W=\widetilde{\{u\}}\cap\widetilde{\{v\}}=f^{-1}[\widetilde{f[u]}]\cap f^{-1}[\widetilde{f[v]}]=f^{-1}[\widetilde{f[u]}\cap\widetilde{f[v]}],$$

а так как $W=f^{-1}[Z]$, то отсюда получаем $Z=\widetilde{\{f(u)\}}\cap$ $\cap\widetilde{\{f(v)\}}$, так что по условию $(f(u), f(v))\in\Phi$, что равносильно соотношению $(u, v)\in\Psi$.

§ 2. УПОРЯДОЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА

В книге, посвященной упорядоченным векторным пространствам, необходимость изложения основных связанных с упорядоченностью понятий не нуждается в обосновании.

0.2.1. Пусть дано множество X. Соответствие σ из X в X называется *отношением порядка* (в множестве X) или просто *порядком* в X, если удовлетворены следующие условия:

(1) $\sigma \supset I_X$ (рефлексивность);

(2) $\sigma \circ \sigma \subset \sigma$ (транзитивность);

(3) $\sigma \cap \sigma^{-1} \subset I_X$ (антисимметричность).

Если σ — отношение порядка в X, то пара (X, σ) называется *упорядоченным множеством* [4].

Если σ — порядок в X, то обратное соответствие σ^{-1}, как очевидно, также будет порядком в X.

Если порядок σ в множестве X фиксирован, то вместо $(x, y) \in \sigma$ пишут $x \leqslant y$ и говорят при этом, что элемент x *меньше* элемента y. Для обозначения обратного порядка используются знак $\geqslant$ и слово «больше», так что соотношения $x \leqslant y$ и $y \geqslant x$ означают одно и то же. В указанных обозначениях условия определения приобретают традиционный вид:

(1) Для любого $x \in X$ имеет место соотношение $x \leqslant x$;

(2) Если $x \leqslant y$, $y \leqslant z$ $(x, y, z \in X)$, то $x \leqslant z$;

(3) Если одновременно $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$ $(x, y \in X)$, то $x = y$.

Об элементе x упорядоченного множества X говорят, что он *строго меньше* элемента $y \in X$ (в обозначениях: $x < y$), если $x \leqslant y$ и $x \neq y$. В этом случае говорят также, что y *строго больше*, чем x, и пишут $y > x$.

Простейшими примерами упорядоченного множества служит числовая прямая $\mathbf{R}$ или расширенная числовая прямая $\overline{\mathbf{R}}$.

Если (X, σ) — упорядоченное множество и множество $X_0 \subset X$, то в X_0 естественным образом возникает отношение порядка $\sigma_0 = i^{-1} \circ \sigma \circ i$, где под i понимается ото-

---

[4] Впрочем, мы обычно будем говорить об «упорядоченном множестве X», лишь подразумевая тот или иной порядок в X, но не фиксируя его в обозначении.

бражение множества X_0 в множество X, которое сопоставляет элементу $x \in X_0$ его самого: $i : x \to x$ ($x \in X_0$). Порядок σ_0 в X_0 называется *индуцированным* в X_0 порядком σ[5].

Далее, если $\{X_t\}$ ($t \in T$) — семейство упорядоченных множеств (с порядком σ_t в X_t), то в произведении $X = \prod_{t \in T} X_t$ каноническим образом определяется «по-координатный» порядок σ: $(x, y) \in \sigma$ ($x, y \in X$) означает, что $(x(t), y(t)) \in \sigma_t$ для каждого $t \in T$. Упорядоченное множество (X, σ) называется *произведением* данного семейства упорядоченных множеств.

Впредь, говоря о произведении $\overline{\mathbf{R}}^T$ или о его подмножестве как об упорядоченном множестве, мы будем всегда иметь в виду определенный выше порядок в произведении или индуцированный им.

Трактуя произведение $\{0, 1\}^T$ как совокупность $\mathfrak{P}(T)$ всех подмножеств множества T, без труда установим, что канонический порядок в $\mathfrak{P}(T)$ означает просто включение множеств: $A \leqslant B$ ($A, B \in \mathfrak{P}(T)$) равносильно включению $A \subset B$.

Пусть (X, σ), (Y, ρ) — упорядоченные множества и f — отображение множества X в множество Y. Если $f^{-1} \circ \rho \circ f \supset \sigma$, то отображение f называется *монотонным* (или *изотонным*). Говорят также, что f сохраняет порядок. Последний термин становится понятным в связи со сказанным в **1.8**: если $(x_1, x_2) \in \sigma$ и, следовательно, $(x_1, x_2) \in f^{-1} \circ \rho \circ f$, то $(f(x_1), f(x_2)) \in \rho$.

Если f взаимно однозначно отображает X на Y и $f^{-1} \circ \rho \circ f = \sigma$, то f называется *изоморфизмом* данных упорядоченных множеств. Поскольку в этом случае $f \circ \sigma \circ f^{-1} = \rho$, то обратное отображение f^{-1} также будет изоморфизмом и тем более монотонным. Понятно, что в рамках теории упорядоченных множеств изоморфные множества (т. е. такие, что существует изоморфизм одного из них на другое) могут быть отождествлены.

0.2.2: Зафиксируем упорядоченное множество X (с порядком σ). Отметим прежде всего, что если $x \in X$, то $\pi(x)$ есть множество, обозначаемое через $[x, \to]$ и со-

---

[5] Читатель самостоятельно проверит, что σ_0 является порядком в X_0.

стоящее из всех таких $u \in X$, что $x \leqslant u$. Равным образом, $\pi^{-1}(x) = [\leftarrow, x] = \{v \in X : v \leqslant x\}$[6].

Пусть имеется множество $A \subset X$. Элемент $u \in X$ называется *наибольшим элементом* множества A (соответственно *наименьшим элементом* множества A), если $u \in \in A \cap \pi(A)$ (или соответственно $u \in A \cap \pi^{-1}(A)$).

Наибольший элемент данного множества A единственен. Действительно, если $u \in A$, $v \in \pi(A)$, то $u \leqslant v$, поэтому в случае, когда u, $v \in A \cap \pi(A)$, должно быть одновременно $u \leqslant v$ и $v \leqslant u$, т. е. $u = v$.

Заменяя в этом утверждении данный порядок обратным, получаем, что единственен и наименьший элемент[7].

Пусть H — какая-либо σ-компонента и $x \in H$. Тогда $H = \pi^{-1}(\pi(H)) \subset \pi^{-}(\pi(x)) = [\leftarrow, x]$. Из этого замечания следует, что если компонента H обладает наибольшим элементом u, то $H = [\leftarrow, u]$.

Действительно, в этом случае $u \in \pi(H)$ и, следовательно (см. предложение I из 1.4), $[\leftarrow, u] = \pi^{-1}(u) \supset \supset \pi^{-1}(\pi(H)) = H \supset [\leftarrow, u]$.

Если A — множество в X, имеющее наибольший элемент u, то u будет и наибольшим элементом порожденной множеством A σ-компоненты $\tilde{A} = \pi^{-1}(\pi(A))$, которая тем самым имеет вид $\tilde{A} = [\leftarrow, u]$.

В самом деле, из включения $u \in A \cap \pi(A)$ вытекают включения $u \in \pi^{-1}(\pi(A)) = \tilde{A}$ и $u \in \pi(\pi^{-1}(\pi(A))) = \pi(\tilde{A})$, так что $u \in \tilde{A} \cap \pi(\tilde{A})$.

Далеко не всякое множество $A \subset X$ имеет наибольший элемент. Не исключена, однако, такая возможность, когда у A нет наибольшего элемента, но σ-компонента $\tilde{A}$, порожденная множеством A, им обладает. Такие ситуации оправдывают следующее важнейшее определение: наибольший элемент σ-компоненты $\tilde{A} = \pi^{-1}(\pi(A))$, порожденной множеством A, называется *точной верхней границей* (сокращенно: т. в. г.) множества A относительно данного порядка σ и обозначается символом

---

[6] В дальнейшем будут использоваться также обозначения: $[x, y] = [x, \rightarrow] \cap [\leftarrow, y]$; $= \{v \in X : v < x\}$; $(x, y) = (x, \rightarrow] \cap [\leftarrow, y)$ и т. п.

[7] В дальнейшем мы не будем, как правило, формулировать утверждения, которые получаются из доказанных в тексте путем замены рассматриваемого порядка на обратный.

$\sup A$ (или, когда в этом есть необходимость, $\sigma\text{-}\sup A$). Т. в. г. множества A относительно обратного порядка σ^{-1}, т. е. элемент $\sigma^{-1}\text{-}\sup A$, называется *точной нижней границей* (сокращенно: т. н. г.) множества A относительно данного порядка σ и обозначается через $\inf A$ (или более точно — $\sigma\text{-}\inf A$). Таким образом, т. н. г. множества A — это наименьший элемент σ^{-1}-компоненты $\pi(\pi^{-1}(A))$, порожденной множеством A[8].

Если $f : \xi \to x_\xi$ $(\xi \in \Xi)$ — отображение некоторого множества Ξ в множество X, то вместо $\sup f[\Xi_0]$ $(\Xi_0 \subset \Xi)$ обычно пишут $\sup\limits_{\xi \in \Xi_0} x_\xi$ и аналогичным образом понимают символ $\inf\limits_{\xi \in \Xi_0} x_\xi$. Если, кроме того, Ξ_0 состоит из двух элементов, например, $\Xi_0 = \{1, 2\}$, то $\sup\limits_{\xi \in \Xi_0} x_\xi$ обозначают через $x_1 \vee x_2$, а $\inf\limits_{\xi \in \Xi_0} x_\xi$ —через $x_1 \wedge x_2$ Не нуждаются в особых пояснениях символы $x_1 \vee x_2 \vee x_3$, $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$ и им подобные, которые изредка будут использоваться в дальнейшем[9].

Отметим некоторые свойства точных границ.

Поскольку для σ-компоненты H будет $\tilde{H} = H$, то

I. *Если σ-компонента H имеет т. в. г., то она служит наибольшим элементом множества H.*

Пусть A — множество в X. Элементы множества $\pi(A)$ называются *верхними границами* множества A, а элементы множества $\pi^{-1}(A)$ — *нижними границами* множества A. О множестве A говорят, что оно *ограничено сверху, если* $\pi(A) \neq \varnothing$, или *снизу*, если $\pi^{-1}(A) \neq \neq \varnothing$. *Множество*, ограниченное как сверху, так и снизу, называется *ограниченным*. Следующее предложение оправдывает термин «т. в. г.».

II. *Т. в. г. множества $A \subset X$ существует тогда и только тогда, когда совокупность $K = \pi(A)$ всех верхних границ множества A имеет наименьший элемент. При этом* $\sup A$ *и служит как раз наименьшей верхней границей.*

---

[8] Заметим, что вместо терминов «т. в. г.» и «т. н. г.» часто употребляются термины «верхняя грань» и соответственно «нижняя грань».

[9] Упомянем еще об одной системе обозначений: $\bigvee\limits_{\xi \in \Xi_0} x_\xi = \sup\limits_{\xi \in \Xi_0} x_\xi$, $\bigwedge\limits_{\xi \in \Xi_0} x_\xi = \inf\limits_{\xi \in \Xi_0} x_\xi$.

Действительно, достаточно заметить, что для произвольного множества A будет $\pi(\tilde{A})=\pi(\pi^{-1}(\pi(A)))=\pi(A)$ и, следовательно, $\tilde{A}\cap\pi(\tilde{A})=\pi(A)\cap\pi^{-1}(\pi(A))$.

Из предложения II и соответствующего факта для т. н. г. вытекает

III. *Если непустое множество $A\subset X$ имеет т. н. г. u и т. в. г. v, то $u\leqslant v$.*

В самом деле, если $x\in A$, то $u\leqslant x$ и $x\leqslant v$. Значит, $u\leqslant v$.

Так как $\pi(\varnothing)=X$, то в силу предложения II т. в. г. пустого множества существует в том и только в том случае, когда X имеет наименьший элемент, который и есть тогда $\sup\varnothing$. Точно так же $\inf\varnothing$ совпадает с наибольшим элементом множества X.

IV. *Если множества A_1, $A_2\subset X$ имеют т. в. г. и $A_1\subset A_2$, то $\sup A_1\leqslant\sup A_2$.*

Для доказательства достаточно заметить, что из $A_1\subset A_2$ вытекает включение $\tilde{A}_1=[\leftarrow, \sup A_1]\subset\tilde{A}_2=[\leftarrow, \sup A_2]$.

Соответствующее утверждение для т. н. г. выглядит так: из $A_1\subset A_2$ следует $\inf A_1\geqslant\inf A_2$.

Важным свойством точных границ является *ассоциативность.*

V. *Пусть дано семейство $\{A_\xi\}$ $(\xi\in\Xi)$ подмножеств множества X. Предположим, что для $\xi\in\Xi$ существует $\sup A_\xi=u_\xi$. Тогда т. в. г. объединения $A=\bigcup\limits_{\xi\in\Xi}A_\xi$ и т. в. г. семейства $\{u_\xi\}$ $(\xi\in\Xi)$ существуют или нет одновременно и если существуют, то*

$$\sup A=\sup\bigcup_{\xi\in\Xi}A_\xi=\sup_{\xi\in\Xi}u_\xi=\sup_{\xi\in\Xi}(\sup A_\xi). \tag{1}$$

Действительно,

$$\tilde{A}=\widetilde{\bigcup_{\xi\in\Xi}A_\xi}=\widetilde{\bigcup_{\xi\in\Xi}\tilde{A}_\xi}=\widetilde{\bigcup_{\xi\in\Xi}[\leftarrow, u_\xi]}=$$
$$=\widetilde{\bigcup_{\xi\in\Xi}\widetilde{\{u_\xi\}}}=\widetilde{\bigcup_{\xi\in\Xi}\{u_\xi\}}=\tilde{U},$$

где через U обозначено множество всех элементов вида u_ξ с $\xi\in\Xi$. Поскольку $\sup U=\sup\limits_{\xi\in\Xi}u_\xi$, этим и доказано высказанное предложение.

Формула, аналогичная (1), при соответствующих условиях имеет место и для т. н. г.

$$\inf \bigcup_{\xi\in\Xi} A_\xi = \inf_{\xi\in\Xi} (\inf A_\xi). \tag{2}$$

Пусть $A\subset X_0\subset X$. Снабжая X_0 индуцированным порядком σ_0, мы можем рассматривать A как множество в упорядоченном множестве X_0 или в упорядоченном множестве X. Следует иметь в виду, что от точки зрения на множество A существенно зависят его точные границы.

VI. *Пусть существует* σ-$\sup A = u$. *Если* $u\in X_0$, *то существует и* σ_0-$\sup A$ *и* σ_0-$\sup A = \sigma$-$\sup A$.

В общем случае, т. е. когда, возможно, $u\overline{\in} X_0$, *если существует* σ_0-$\sup A$, *то*

$$\sigma\text{-}\sup A \leqslant \sigma_0\text{-}\sup A. \tag{3}$$

Для доказательства отметим прежде всего, что, как очевидно, $B_0 = \pi_{\sigma_0}(A) = \pi_\sigma(A) \cap X_0 \subset \pi_\sigma(A) = B$. Поскольку u является наименьшим элементом множества B (предложение II), то $u\in B\cap \pi_\sigma^{-1}(B)$. Но если $u\in X_0$, то

$$u\in B\cap\pi_\sigma^{-1}(B)\cap X_0 \subset (B\cap X_0)\cap\left(\pi_\sigma^{-1}(B_0)\cap X_0\right) = \\ = B_0\cap\pi_{\sigma_0}^{-1}(B_0).$$

Следовательно, u будет наименьшим (относительно порядка σ_0) элементом множества B_0, или, иначе говоря, т. в. г. множества A относительно порядка σ_0.

Рассмотрим общий случай. Допустим, что существует σ_0-$\sup A = v$. Учитывая, что $v\in B_0\cap\pi_{\sigma_0}^{-1}(B_0)\subset \subset B_0\cap\pi_\sigma^{-1}(B_0)$, можем написать на основании предложения IV: $u = \sigma$-$\inf B \leqslant \sigma$-$\inf B_0 = v$, что и означает справедливость (3).

Об отображении f данного множества X в упорядоченное множество Y (с порядком ρ) говорят, что оно *сохраняет т. в. г.*, если образ $f[A]$ любого множества $A\subset X$, у которого существует т. в. г., также имеет т. в. г., причем

$$\sup f[A] = f(\sup A) \tag{4}$$

Если при соответствующих предположениях

$$\inf f[A] = f(\inf A), \tag{5}$$

то говорят, что f *сохраняет т. н. г.* Наконец, если f сохраняет как т. в. г., так и т. н. г., то по определению f *сохраняет точные границы.* В частности, подмножество X_0 упорядоченного множества X называется *правильным вверх, правильным вниз* или *правильным*, если тождественное вложение X_0 в X сохраняет соответственно т. в. г., т. н. г. или точные границы[10)].

VII. *Если отображение $f : X \to Y$ удовлетворяет условию: $f[\widetilde{A}] \subset \widetilde{f[A]}$ для любого множества $A \subset X$, то оно сохраняет т. в. г.*

Докажем сначала, что в условиях предложения f монотонно. Возьмем такие элементы $x, u \in X$, что $x \leqslant u$. Так как $x \in [\leftarrow, u] = \widetilde{\{u\}}$, то по условию $f(x) \in f[\widetilde{\{u\}}] \subset \widetilde{\{f(u)\}} = [\leftarrow, f(u)]$, т. е. $f(x) \leqslant f(u)$.

Пусть теперь A — произвольное множество в X. Из монотонности отображения f вытекает

$$f[\pi_\sigma(A)] = f\left[\bigcap_{x \in A} \pi_\sigma(x)\right] \subset \bigcap_{x \in A} f[\pi_\sigma(x)] =$$
$$= \bigcap_{x \in A} f[[x, \to]] \subset \bigcap_{x \in A} \pi_\rho(f(x)) = \pi_\rho(f[A]).$$

Поэтому, используя условие, получаем

$$\widetilde{f[A]} \cap \pi_\rho(f[A]) \supset f[\widetilde{A}] \cap f[\pi_\sigma(A)] \supset f[\widetilde{A} \cap \pi_\sigma(A)].$$

Если A имеет т. в. г. u, то $u \in \widetilde{A} \cap \pi_\sigma(A)$. Стало быть, $f(u) \in \widetilde{f[A]} \cap \pi_\rho(f[A])$, так что $f(u)$ является наибольшим элементом ρ-компоненты $\widetilde{f[A]}$, т. е. т. в. г. множества $f[A]$. Итак, для A и f выполнено (4).

0.2.3. Данное множество в данном упорядоченном множестве, разумеется, не обязано обладать точными границами, даже если оно ограничено сверху или снизу. В связи с этим представляется целесообразным

[10)] Не давая полных определений, упомянем об отображениях, сохраняющих точные границы конечных множеств, о конечно-правильных подмножествах и об аналогичных понятиях.

выделить такие классы упорядоченных множеств, в которых заранее требуется существование точных границ у тех или иных множеств.

Как и в предыдущем пункте, зафиксируем упорядоченное множество X (с порядком σ).

Упорядоченное множество X называется *решеткой,* если каждое непустое конечное подмножество в X имеет как т. в. г., так и т. н. г. Если гарантируется существование только т. в. г., то говорят о *верхней решетке*, если только т. н. г. — о *нижней.*

Если упорядоченное множество X таково, что существование точных границ обеспечено лишь у ограниченных (сверху — для т. в. г., снизу — для т. н. г.) непустых конечных множеств, то X называется *условной решеткой.* Можно, разумеется, говорить об условной верхней или нижней решетке.

Заметим, что, используя свойство ассоциативности, легко по индукции доказать, что в приведенных выше определениях можно проверять существование нужных точных границ лишь у двухэлементных множеств.

Если заменить порядок в X обратным, то, очевидно, верхняя (условно верхняя) решетка превратится в нижнюю (условно нижнюю) и наоборот. Решетка же останется решеткой.

Множество X называется *полной решеткой*, если каждое множество в X обладает точными границами. Множество X будет *условно полной решеткой*, если каждое непустое ограниченное сверху или снизу множество имеет точную верхнюю или соответственно нижнюю границу.

Понятие верхней полной (или даже условно полной) решетки вводить нет необходимости.

I. *Если упорядоченное множество X таково, что каждое множество $A\subset X$ имеет т. в. г., то X — полная решетка. Если существование т. в. г. гарантируется лишь для непустых ограниченных сверху множеств, то X — условно полная решетка.*

Действительно, если выполнено условие первой части предложения, то для любого множества $A\subset X$ существует $\sup \pi^{-1}(A)=u$. Но множество $\pi^{-1}(A)$ является σ-компонентой и, следовательно, u — ее наибольший элемент, т. е. согласно предложению II из **2.2** — т. н. г. множества A.

Если соблюдено лишь условие второй части предложения и A — непустое ограниченное снизу множество в X, то $H=\pi^{-1}(A)\neq\varnothing$, и так как $\pi(H)=\pi(\pi^{-1}(A))\supset A$, то и $\pi(H)\neq\varnothing$. Таким образом, σ-компонента H — непустое ограниченное сверху множество. Это позволяет воспользоваться схемой доказательства первой части и установить, что множество A имеет т. н. г.

Заканчивая перечень определений различного рода решеток, упомянем о так называемых *σ-полных решетках*. Под этим подразумевается такое упорядоченное множество X, что любое непустое не более чем счетное множество в X имеет точные границы [11].

Мы не останавливаемся на формулировке определения *условно σ-полной решетки* и тем более нижней или верхней σ-полной решетки, предоставляя эти формулирировки читателю.

II. *Если X — полная решетка, то каждая σ-компонента — главная, т. е. имеет вид $\widetilde{\{x\}}$ при некотором $x\in X$. Если X — условно полная решетка, то главными будут все непустые компоненты, отличные от X.*

В самом деле, в первом случае, если H — какая-либо σ-компонента, то полагая $x=\sup H$, будем иметь в силу предложения I из **2.2** $H=[\leftarrow, x]=\widetilde{\{x\}}$.

Во втором случае, понимая под H — непустую σ-компоненту, отличную от X, можем утверждать, что $\pi(H)\neq\varnothing$ (в противном случае $H=\pi^{-1}(\pi(H))=$ $=\pi^{-1}(\varnothing)=X$). Таким образом, H ограничено сверху и, следовательно, существует $\sup H=x$ и, значит, $H=\widetilde{\{x\}}$.

Нетрудно показать, что верно и обратное утверждение: если каждая σ-компонента — главная, то X — полная решетка; если каждая непустая и отличная от X σ-компонента — главная, то X — условно полная решетка.

Важный пример полной решетки указывается в следующем предложении.

III. *Пусть U и V — произвольные множества и Φ — соответствие из U в V. Совокупность $\mathfrak{K}_\Phi(U)$ всех Φ-компонент множества U, упорядоченная по включению, представляет собой полную решетку.*

---

[11] Используется также термин «счетно-полная решетка».

Действительно, обозначим через Σ_0 порядок в $\mathfrak{K}_\Phi(U)$, и пусть $\mathfrak{H}$ — множество Ф-компонент. Поляра $\pi_{\Sigma_0}(\mathfrak{H})$ состоит из всех Ф-компонент, содержащих каждую Ф-компоненту $H\in\mathfrak{H}$, т. е. из всех Ф-компонент, содержащих множество $S=\bigcup\limits_{H\in\mathfrak{H}} H$. Согласно предложению I из **1.5** Ф-компонента $\widetilde{S}=\pi_\Phi^{-1}(\pi_\Phi(S))$ — наименьшая в множестве $\pi_{\Sigma_0}(\mathfrak{H})$, так что $\widetilde{S}=\Sigma_0\text{-}\sup\mathfrak{H}$ (предложение II из **2.2**). Применение предложения I заканчивает доказательство.

Рассмотрим совокупность $\mathfrak{P}(U)$ всех подмножеств множества U так же, как и $\mathfrak{K}_\Phi(U)$, упорядоченную по включению. Ясно, что порядок Σ в $\mathfrak{P}(U)$ индуцирует в $\mathfrak{K}_\Phi(U)$ порядок Σ_0. Нетрудно понять, что для любого множества $\mathfrak{A}\subset\mathfrak{P}(U)$ выполняется [12]

$$\Sigma\text{-}\sup\mathfrak{A}=\bigcup_{A\in\mathfrak{A}} A,\quad \Sigma\text{-}\inf\mathfrak{A}=\bigcap_{A\in\mathfrak{A}} A,$$

Если, в частности $\mathfrak{A}=\mathfrak{H}\subset\mathfrak{K}_\Phi(U)$, то, поскольку на основании предложения II из **1,5** $\Sigma\text{-}\inf\mathfrak{H}=\bigcap\limits_{H\in\mathfrak{H}} H\in\mathfrak{K}_\Phi(U)$, в силу предложения VI из **2.2** заключаем, что $\Sigma_0\text{-}\inf\mathfrak{H}=\Sigma\text{-}\inf\mathfrak{H}$. Вместе с тем полезно иметь в виду, что, вообще говоря, $\Sigma\text{-}\sup\mathfrak{H}$ отлично от $\Sigma_0\text{-}\sup\mathfrak{H}$

В случае, когда $U=V=X$, а $\Phi=\sigma$ — отношение порядка в X, результат предложения III может быть несколько уточнен.

Теорема 3(2.0). *Каноническое отображение φ множества X в множество $\mathfrak{X}=\mathfrak{K}_\sigma(X)$ всех σ-компонент взаимно-однозначно и сохраняет точные границы.*

Доказательство. Напомним, что каноническое отображение φ сопоставляет элементу $x\in X$ порожденную им σ-компоненту $\widetilde{\{x\}}=[\leftarrow, x]$. Поэтому если $\varphi(x)=\varphi(y)$, то x и y, будучи каждый наибольшим элементом одного и того же множества, совпадают.

Чтобы доказать, что φ сохраняет точные границы, воспользуемся предложением VII из **2.2**. Обозначим, как и раньше, порядок в $\mathfrak{X}$ через Σ_0. Пусть $A\subset X$. Так как

[12] При этом пересечение пустой совокупности подмножеств множества U принимается по определению равным U.

каждая Σ_0-компонента — главная (предложение II), то $\widetilde{\varphi[A]} = \pi_{\Sigma_0}^{-1}(\pi_\Sigma(\varphi[A])) = [\leftarrow, H_0]$, где $H_0 = \Sigma_0\text{-sup}\,\varphi[A] = \bigcup_{x\in A} \widetilde{\varphi(x)} = \bigcup_{x\in A} \widetilde{\{x\}} \pm \widetilde{A}$.

Ввиду того, что множество $\widetilde{A}$ является σ-компонентой, для $x\in\widetilde{A}$ должно быть: $\varphi(x) = \widetilde{\{x\}} \subset \widetilde{A} = H_0$, т. е. $\varphi[\widetilde{A}] \subset \widetilde{\varphi[A]}$.

Согласно предложению VII из **2.2** отображение φ сохраняет т. в. г. Таким же точно образом можно убедиться, что φ удовлетворяет условиям цитированного предложения, если там под $\widetilde{A}$ понимать наименьшую σ^{-1}-компоненту, содержащую множество A, и равным образом под $\widetilde{\varphi[A]}$ — наименьшую Σ_0^{-1}- компоненту, содержащую множество $\varphi[A]$. Это позволит утверждать, что φ сохраняет и т. н. г., т. е. удовлетворяет (5).

Если X — это множество всех рациональных чисел (снабженное естественным порядком), то полную решетку $\mathfrak{X}$ можно трактовать как расширенную числовую прямую. В связи с этим обстоятельством в общем случае упорядоченное множество $\mathfrak{X}$ называют *дедекиндовским расширением* данного множества X [13]).

0.2.4. Понятие т. в. г. множества A служит обобщением понятия наибольшего элемента в том смысле, что из двух требований определения наибольшего элемента: $u\in A$ и $u\in\pi(A)$ первое заменяется более слабым: $u\in\widetilde{A}$. Можно, однако, обобщить понятие наибольшего элемента и по-другому, требуя лишь, чтобы данный элемент u был наибольшим не во всем A, а только в множестве A_u всех элементов из A, «сравнимых» с u.

Фиксируя упорядоченное множество X (с порядком σ), дадим точные определения.

Будем говорить, что элементы $x, y\in X$ *сравнимы*, если $(x, y)\in\theta = \sigma \cup \sigma^{-1}$, т. е. если верно одно из двух соотношений: $x\leqslant y$ ($(x, y)\in\sigma$) или $y\leqslant x$ ($(x, y)\in\sigma^{-1}$). Если $u\in X$, множество $X_u = \theta[u] = \sigma[u] \cup \sigma^{-1}[u] = [u, \rightarrow] \cup [\leftarrow, u]$ представляет собой множество всех элементов из X, сравнимых с u.

[13]) Впрочем, если в X нет ни наибольшего, ни наименьшего элементов, под дедекиндовским расширением понимают также множество $\mathfrak{X}_0$ всех непустых σ-компонент, отличных от самого множества X. При этом дедекиндовским расширением множества всех рациональных чисел будет уже множество $\mathbf{R}$ всех вещественных (конечных) чисел.

Элемент $u \in X$ называется *максимальным элементом* множества $A \subset X$, если u — наибольший элемент множества $A_u = A \cap X_u$.

Если u — наименьший элемент множества A_u, то он называется *минимальным элементом* множества A. Таким образом, минимальный элемент множества A — это его максимальный элемент, но относительно порядка σ^{-1}.

I. *Элемент $u \in A$ является максимальным элементом множества $A \subset X$ тогда и только тогда, когда пересечение $A \cap [u, \rightarrow] = \{u\}$, или, что то же, когда $A \cap (u, \rightarrow] = \varnothing$.*

Действительно, пусть u — максимальный элемент множества A. Тогда $u \in A_u \subset A$ и $u \in [u, \rightarrow]$, так что $u \in A \cap [u, \rightarrow]$. Пусть, кроме того, $v \in A \cap [u, \rightarrow]$. Ясно, $v \in A_u$. Следовательно, должно быть $v \leqslant u$, т. е. $v \in [\leftarrow, u]$. Значит, $\{u\} = [\leftarrow, u] \cap [u, \rightarrow] \ni v$.

Предположим теперь, что выполнены условия предложения. Из них немедленно вытекает, что $A_u = A \cap [\leftarrow, u]$ Тем самым $u \in A_u$. А так как $A_u \subset [\leftarrow, u] = \pi^{-1}(u)$, то $u \in \pi(\pi^{-1}(u)) \subset \pi(A_u)$. Стало быть $u \in A_u \cap \pi(A_u)$, т. е. u — наибольший элемент множества A_u.

II. *Если u — наибольший элемент множества $A \subset X$, то u — единственный максимальный элемент этого множества.*

В самом деле, ввиду того, что в условиях предложения $A_u = A$, u — максимальный элемент множества A. Если, кроме того, и v — максимальный элемент множества A, то, поскольку $v \in A$, должно быть $v \leqslant u$. Следовательно, $u \in A \cap [v, \rightarrow]$. Значит, согласно предложению I $v = u$.

Следует иметь в виду, что в случае отсутствия наибольшего элемента у множества A это множество может обладать многими максимальными элементами.

Чтобы сформулировать критерий существования максимального элемента, нам понадобится следующее определение.

Множество $C \subset X$ называется *цепью*, если $C^2 \subset \theta = \sigma \cup \sigma^{-1}$, т. е. если любые два элемента из C сравнимы. По индукции нетрудно доказать, что каждое конечное непустое подмножество цепи C имеет как наибольший, так и наименьший элементы.

Лемма. *Предположим, что упорядоченное множество X имеет наименьший элемент* $\mathbf{0}$ *и обладает, кроме того, тем свойством, что каждая цепь в X имеет т. в. г. Тогда* *в X существует по крайней мере один максимальный элемент*[14].

Доказательство. Допустим, что ни один из элементов множества X не максимален. Из предложения I следует тогда, что для любого $x \in X$ множество $(x, \to] \neq \varnothing$. Выбирая $v_x \in (x, \to]$ $(x \in X)$, введем отображение $f: x \to v_x$ $(x \in X)$. Отображение f характеризуется, стало быть, тем, что $x < f(x)$ для каждого $x \in X$.

Множество $W \subset X$ называется простым, если $f[W] \subset W$ и, кроме того, у каждой цепи $C \subset W$ ее т. в. г также принадлежит W. Примером простого множества служит само множество X.

Обозначим через W_0 пересечение совокупности всех простых множеств. Ясно, что W_0 — простое и, следовательно, наименьшее простое множество.

Элемент $u \in W_0$ назовем разбивающим, если $f[W_0 \cap [0, u)] \subset [0, u]$. Оправдывая терминологию, докажем, что если u — разбивающий элемент, то

$$W_0 = W_0 \cap ([0, u] \cup [f(u), \to]). \tag{6}$$

Для этого, очевидно, достаточно доказать, что множество $W = W_0 \cap ([0, u] \cup [f(u), \to])$ — простое, поскольку тогда оно должно содержать множество W_0 и, значит, будет совпадать с ним. Отметим прежде всего, что

$$f[W] = f[W_0 \cap [0, u)] \cup f[u] \cup f[W_0 \cap [f(u), \to]] \subset$$
$$\subset (W_0 \cap [0, u]) \cup (W_0 \cap [f(u), \to]) = W.$$

Рассмотрим цепь $C \subset W$. Если $C \subset W_0 \cap [0, u]$, то ввиду того, что $\sup C \leqslant u$, а с другой стороны $\sup C \in W_0$ (ведь $C \subset W_0$, а W_0 — простое), можем написать: $\sup C \in W_0 \cap [0, u] \subset W$. В случае, когда пересечение $W_0 \cap [f(u), \to] \cap C \neq \varnothing$ и $x \in W_0 \cap [f(u), \to] \cap C$, должно быть $f(u) \leqslant x \leqslant \sup C$, так что и на этот раз $\sup C \in W_0 \cap [f(u), \to] \subset W$.

Пусть $x \in W_0$ и u — какой-либо разбивающий элемент. Из (6) следует, что справедливо одно из двух соотношений: $x \leqslant u$ или $u < f(u) \leqslant x$. Отсюда вытекает, что элементы x и u сравнимы.

Убедимся теперь, что множество U всех разбивающих элементов простое и, следовательно, совпадает с W_0.

---

[14] Стоит отметить, что эта лемма основана на *аксиоме выбора*.

Пусть $u \in U$ и $x \in W_0 \cap [0, f(u))$. В силу сделанного выше замечания должно быть $x \leqslant u$, так что

$$f(x) \in f[W_0 \cap [0, u]] = f[W_0 \cap [0, u)] \cup \\ \cup f[u] \subset [0, u] \cup f[u] \subset [0, f(u)],$$

Таким образом $f[W_0 \cap [0, f(u))] \subset [0, f(u)]$, т. е. $f(u) \in U$.

Возьмем цепь $C \subset U$. Обозначим $\sup C = u$. Если $C = \varnothing$, то, очевидно, $u = 0 \in U$. Рассмотрим случай $C \neq \varnothing$. Пусть $x \in W_0 \cap [0, u)$. Если для каждого $y \in C$ верно соотношение $y \leqslant x$, т. е. если $x \in \pi(C)$, то $u \leqslant x$, что противоречит предположению об элементе x. Следовательно, найдется такой элемент $y_0 \in C$, для которого соотношение $y_0 \leqslant x$ неверно. Поскольку $y_0 \in C \subset U$ (а $x \in W_0$), то, как отмечалось, элементы y_0 и x сравнимы. Поэтому должно быть $x < y_0$. Еще раз используя то обстоятельство, что y_0 — разбивающий элемент, получаем $f(x) \leqslant y_0$ и тем более $f(x) \leqslant u$. Таким образом, $f[W_0 \cap [0, u)] \subset [0, u]$. Элемент u — разбивающий.

Ввиду того, что каждый элемент множества W_0 — разбивающий, он сравним с любым другим элементом множества W_0. Следовательно, W_0 является цепью. По условию существует $u_0 = \sup W_0$, причем $u_0 \in W_0$. Но тогда вследствие простоты множества W_0 и $f(u_0) \in W_0$, так что $f(u_0) \leqslant u_0$. Между тем $u_0 < f(u_0)$.

Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Рассмотрим множество U и соответствие Ψ из U в U^2. Пусть A — такое подмножество множества U, что $A^2 \subset \Psi[A]$. Через $\mathfrak{X}$ обозначим упорядоченную по включению совокупность всех таких множеств $E \subset U$, что $E \supset A$ и $E^2 \subset \Psi[E]$. Основываясь на доказанной лемме, установим следующий полезный результат.

Теорема 4(2.0). *Множество $\mathfrak{X}$ имеет по крайней мере один максимальный элемент.*

Доказательство. Отметим, во-первых, что множество A является наименьшим элементом совокупности $\mathfrak{X}$. Убедимся, что и другое условие леммы также выполнено.

Пусть $\mathfrak{C}$ — цепь в $\mathfrak{X}$. Поскольку $\sup \varnothing = A$ существует, можно считать, что $\mathfrak{C} \neq \varnothing$. Положим $\bar{E} = \bigcup_{E \in \mathfrak{C}} E$. Понятно, что $\bar{E} \supset A$. Возьмем элементы $x, y \in \bar{E}$. Найдутся такие множества $E_1, E_2 \in \mathfrak{C}$, что $x \in E_1$, $y \in E_2$. Следовательно, $x, y \in E = E_1 \cup E_2$. Так как $\mathfrak{C}$ — цепь, то объединение $E = E_1 \cup E_2$ совпадает с одним из множеств E_1 или E_2, так что $E \in \mathfrak{C}$ и, стало быть, $E \in \mathfrak{X}$. Тем самым $(x, y) \in E^2 \subset \Psi[E] \subset \Psi[\bar{E}]$. Этим доказано включение $\bar{E}^2 \subset \Psi[\bar{E}]$, т. е., иными словами, доказано, что $\bar{E} \in \mathfrak{X}$. А тогда с помощью предложения VI из **2.2** заключаем, что $\bar{E} = \sup \mathfrak{C}$.

Для завершения доказательства достаточно теперь воспользоваться результатом леммы.

Следствие 1. *Каковы бы ни были упорядоченное множество X и цепь C_0 в нем, в множестве всех цепей в X существует максимальная, содержащая данную цепь C_0.*

Действительно, примем в теореме $U = X$, $\Psi = X \times \theta$ $(\theta = \sigma \cup \sigma^{-1})$, $A = C_0$. Так как для непустого множества $C \subset X$ образ $\Psi[C] = \theta$, то множество $\mathfrak{X}$ теоремы состоит из всех цепей, содержащих C_0. Остается заметить, что максимальный элемент множества $\mathfrak{X}$ будет, как легко видеть, и максимальным элементом множества всех цепей.

Утверждение следствия 1 известно под названием *теоремы Хаусдорфа*. С ее помощью можно несколько уточнить результат леммы. В такой уточненной форме его называют *леммой Цорна*.

Следствие 2. *Если упорядоченное множество X обладает тем свойством, что каждая непустая цепь в нем ограничена сверху,*[15] *то, каков бы ни был элемент $x_0 \in X$, множество X обладает максимальным элементом, большим, чем x_0.*

Взяв $C_0 = \{x_0\}$, образуем в соответствии со следствием 1 максимальную цепь C, содержащую цепь C_0, т. е., иначе говоря, содержащую элемент x_0. По условию $\pi(C) \neq \varnothing$. Пусть $u \in \pi(C)$. Так как множество $\bar{C} = C \cup \{u\}$, очевидно, представляет собой цепь, которая содержит максимальную цепь C, то в силу предложения I $\bar{C} = C$, так что $u \in C$. Следовательно, $\pi(C) \subset C$ и, стало быть, $\pi(C) = \pi(C) \cap C$. Таким образом, поляра $\pi(C)$ состоит из единственного элемента u — наибольшего элемента цепи C. Учитывая, что $[u, \rightarrow] = \pi(u) = \pi(C)$, заключаем, снова прибегая к предложению I, что u — максимальный элемент множества X. Очевидно, $x_0 \leqslant u$.

[15] В этом случае X называется *индуктивным*.

Элементы x, $y \in X$ называются *несравнимыми*, если неверно ни одно из соотношений: $x < y$ и $y < x$ [16].

Обозначим совокупность всех таких пар $(x, y) \in X^2$, что x и y несравнимы, через Λ. Множество $E \subset X$ называется *изолированным*, если $E^2 \subset \Lambda$. Поскольку для каждого элемента x изолированного множества E множества $E \cap (x, \rightarrow]$ и $E \cap [\leftarrow, x)$ пусты, x будет максимальным и одновременно минимальным элементом множества E. Нетрудно видеть, что наличие этого свойства (или даже его «половины») у множества E равносильно его изолированности. Отсюда легко вывести, что совокупность всех максимальных элементов множества X и равным образом совокупность всех минимальных элементов множества X представляет собой изолированное множество.

Если в теореме 4 принять $U = X$, $\Psi = X \times \Lambda$, то буквально так же, как в случае следствия 1, можно получить следующий результат.

III. *Каково бы ни было изолированное множество $E \subset X$, в X существует максимальное изолированное множество $Q \supset E$.*

Максимальное изолированное множество Q называется *сечением* множества X. Если при этом все элементы сечения Q суть минимальные элементы множества X, то Q называется *нижним основанием* множества X. Аналогично определяется *верхнее основание* множества X.

Пусть Q — какое-либо сечение множества X. Обозначим

$$X^- = \bigcup_{q \in Q} [\leftarrow, q], \quad X^+ = \bigcup_{q \in Q} [q, \rightarrow].$$

IV. *Множество Q служит нижним основанием множества X^+ и верхним основанием множества X^-. При этом $X = X^- \cup X^+$, $Q = X^- \cap X^+$.*

Первая часть высказанного утверждения очевидна. Докажем соотношение $X = X^- \cup X^+$. Предположим, что элемент $x \in X$ не входит ни в X^-, ни в X^+. Это значит, что x несравним ни с одним из элементов сечения Q, что противоречит его максимальности.

---

[16] Эта терминология не вполне последовательна, поскольку элемент x оказывается несравнимым с самим собой.

Если $x \in X^- \cap X^+$, то существуют элементы $q_1, q_2 \in Q$ такие, что $x \leqslant q_1$, $x \geqslant q_2$. Отсюда следует, что $q_2 \leqslant q_1$ и так как элементы q_1 и q_2 несравнимы, то $q_1 = q_2$. Следовательно, $x = q_1 = q_2 \in Q$. Этим доказано равенство $Q = X^- \cap X^+$.

Заметим, что если X — условно полная решетка, то и оба множества X^- и X^+ (с индуцированным порядком) также будут условно полными решетками. Надо только иметь в виду, что множество $A \subset X^+$, ограниченное снизу в X, может и не быть ограниченным снизу в X^+.

Замечание. В приложениях иногда удобно пользоваться несколько иной формой леммы Цорна, связанной с понятием вполне упорядоченного множества. Именно упорядоченное множество называется *вполне упорядоченным*, если, во-первых, это множество является цепью, и во-вторых, таково, что любое его непустое подмножество содержит минимальные элементы. Предоставляем читателю убедиться в том, что на всяком непустом множестве можно задать порядок, превращающий его во вполне упорядоченное множество. Последний факт называют *теоремой Цермело.*

Элементы вполне упорядоченного множества называются *трансфинитами.* Поскольку вполне упорядоченное множество X обладает наименьшим элементом $\mathbf{0}$, то для всякого трансфинита $\omega \in X$ возникает альтернатива: либо $\omega = \sup[\mathbf{0}, \omega)$ — в этом случае трансфинит ω называется *предельным,* либо $\omega' = \sup\ [\mathbf{0}, \omega)$ таково, что $\omega' < \omega$,— в этом случае ω' называется *непосредственно предшествующим* ω *трансфинитом.* Таким образом, для проверки справедливости некоторого утверждения P об элементах вполне упорядоченного множества следует установить справедливость P для элемента $\mathbf{0}$, а затем обосновать законность «перебора» элементов в двух случаях — от непосредственно предшествующего трансфинита к следующему за ним и к предельному трансфиниту от меньших элементов. Этот метод доказательства называется *принципом трансфинитной индукции.*

0.2.5. Рассмотрим полную решетку X (с порядком σ). Обозначим через $\mathbf{0}$ наименьший элемент множества X и предположим, что множество $X_0 = X \setminus \{\mathbf{0}\}$ имеет нижнее основание Q. Примем $\rho = \sigma \circ i = I_X \circ \sigma \circ i$ (здесь i — вложение множества Q в множество $X: i: q \to q$ $(q \in Q)$) и будем рассматривать ρ как соответствие из Q в X (см. 1.8). На основании сказанного в 1.8 (равенства (25) и (26))

$$\pi(A)=\pi_\rho(A)=\pi_\sigma(A)=[\sup A, \to] \quad (A\subset Q); \tag{7}$$

$$\pi^{-1}(B)=\pi_\rho^{-1}(B)=i^{-1}[\pi_\sigma^{-1}(B)]=\pi_\sigma^{-1}(B)\cap Q=$$
$$=[\leftarrow, \inf B]\cap Q=\pi^{-1}(\inf B) \quad (B\subset X). \tag{8}$$

Поэтому для произвольного множества $A\subset Q$ будет

$$\tilde{A}=\pi^{-1}(\pi(A))=\pi^{-1}([\sup A, \to])=\pi^{-1}(\sup A)=$$
$$=[\leftarrow, \sup A]\cap Q. \tag{9}$$

В частности, если множество $F\subset Q$ является ρ-компонентой, то

$$F=\pi^{-1}(\sup F), \tag{10}$$

так что совокупность $\mathfrak{Q}=\mathfrak{K}_\rho(Q)$ всех ρ-компонент множества Q исчерпывается компонентами вида $\pi^{-1}(x)$ с $x\in X$.

Введем отображение $\lambda: x\to\pi^{-1}(x)$ $(x\in X)$ множества X на множество $\mathfrak{Q}$.

I. *Если* $F\in\mathfrak{Q}$, *то* $\sup F$ *является наименьшим элементом прообраза* $\lambda^{-1}[F]$.

В самом деле, согласно (10) $F=\pi^{-1}(\sup F)=\lambda(\sup F)$. Далее, из $x\in\lambda^{-1}[F]$ с помощью (7) вытекает $x\in\pi(\pi^{-1}(x))=\pi(F)=[\sup F, \to]$, т. е. $x\geqslant\sup F$.

II. *Отображение* λ *сохраняет т. н. г.*

Действительно, согласно сказанному в 2.3 для множества $B\subset X$ можем написать с учетом (8):

$$\inf\lambda[B]=\bigcap_{x\in B}\lambda(x)=\bigcap_{x\in B}\pi^{-1}(x)=\pi^{-1}(B)=$$
$$=\pi^{-1}(\inf B)=\lambda(\inf B).$$

Поскольку λ сохраняет т. н. г., оно монотонно: если $x\leqslant y$ $(x, y\in X)$, то $\lambda(x)=\lambda(x\wedge y)=\lambda(x)\cap\lambda(y)$, так что $\lambda(x)\subset\lambda(y)$.

Отметим еще одно следствие предложения II.

Рассмотрим элементы $q \in Q$, $x \in X$. Так как q — минимальный элемент множества Q, то в силу (8) и предложения I из **2.4**

$$\pi^{-1}(q) = [\leftarrow, q] \cap Q = \{q\}. \qquad (11)$$

Поэтому если $q \wedge x = \mathbf{0}$ и, следовательно, $\lambda(q) \cap \lambda(x) = \lambda(q \wedge x) = \lambda(\mathbf{0}) = \varnothing$, то $q \overline{\in} \lambda(x) = \pi^{-1}(x)$. Предполагая, наоборот, что $q \overline{\in} \pi^{-1}(x) = \lambda(x)$, можем в силу (11) написать: $\lambda(q \wedge x) = \varnothing$, что возможно лишь в случае $q \wedge x \overline{\in} X_0$, т. е. в случае, когда $q \wedge x = \mathbf{0}$ (предложение IV из **2.4**). Таким образом, соотношения $q \wedge x = \mathbf{0}$ и $q \overline{\in} \pi^{-1}(x)$ равносильны.

Укажем теперь условия взаимной однозначности отображения λ.

III. *Для того чтобы отображение λ было взаимно-однозначно, необходимо и достаточно, чтобы для любых таких элементов x, $y \in X$, что $x > y$, можно было указать отличный от* $\mathbf{0}$ *элемент $z \in X$ так, чтобы было $z \leqslant x$, $z \wedge y = \mathbf{0}$.*

В самом деле, если λ — взаимно-однозначно и $x > y$ (x, $y \in X$), то $\lambda(x) \supset \lambda(y)$, причем $\lambda(x) \neq \lambda(y)$. Если взять $q \in \lambda(x) \setminus \lambda(y)$, то вследствие того, что $q \in \lambda(x) = \pi^{-1}(x)$, будет $q \leqslant x$. Соотношение же $q \overline{\in} \lambda(y)$ влечет равенство $q \wedge y = \mathbf{0}$. Ясно, что $q \neq \mathbf{0}$.

Предположим теперь, что выполнено условие предложения. Докажем сначала, что тогда при любом $x \in X$ множество $[x, \rightarrow]$ будет ρ^{-1}-компонентой. Воспользуемся для этой цели теоремой 1. Пусть $u \overline{\in} [x, \rightarrow]$ ($u \in X$). Так как $y = x \wedge u < x$, то по условию найдется элемент $z \in X$ такой, что $\mathbf{0} < z \leqslant x$ и $z \wedge y = \mathbf{0}$. Поскольку $z \in X_0 = \bigcup_{q \in Q} [q, \rightarrow]$, то можно указать в Q элемент q, меньший, чем z. Стало быть, q удовлетворяет тем же соотношениям, что и z, т. е. $q \leqslant x$ и $q \wedge y = \mathbf{0}$. Первое из этих соотношений дает $[x, \rightarrow] \subset [q, \rightarrow] = \pi(q)$, а из второго вытекает, что $q \overline{\in} \pi^{-1}(y) = \pi^{-1}(x) \cap \pi^{-1}(u)$. Следовательно, $u \overline{\in} \pi(q)$ (в противном случае было бы $q \in \pi^{-1}(u)$, т. е. $q \in \pi^{-1}(x) \cap \pi^{-1}(u)$). Итак, условия цитированной выше теоремы выполнены, так что множество $[x, \rightarrow]$ действительно является ρ^{-1}-компонентой. Это означает, что

$[x, \rightarrow]=\pi(\pi^{-1}([x, \rightarrow]))=\pi(\pi^{-1}(x))$. Если взять здесь $x\in\lambda^{-1}[F]$, где F — какая-либо ρ-компонента, то получим $[x, \rightarrow]=\pi(F)=[\sup F, \rightarrow]$, откуда следует равенство $x=\sup F$.

Этим и завершается доказательство предложения.

IV. *Если выполнено условие предложения* III, *то отображение* λ *является изоморфизмом множества* X *на множество* $\mathfrak{Q}$.

В самом деле, если $F_1\subset F_2$ $(F_1, F_2\in\mathfrak{Q})$, то в силу предложения IV из **2.2** $\sup F_1\leqslant\sup F_2$. Но согласно предложению I $\sup F_k=\lambda^{-1}(F_k)$ $(k=1, 2)$.

Если λ взаимно-однозначно и, следовательно, является изоморфизмом, то, разумеется, λ сохраняет т. в. г. В общем случае это уже неверно. Так, если при каком-нибудь $F\in\mathfrak{Q}$ множество $\lambda^{-1}[F]=B$ не имеет наибольшего элемента, то, хотя $\sup\lambda[B]=F$, все же $\lambda(\sup B)\neq$ $\neq F$. Поэтому ставить вопрос о сохранении т. в. г. можно, лишь накладывая на X те или иные дополнительные требования.

Будем говорить, что для элемента $x\in X$ соблюдено *условие* (D), если для любых таких элементов $y, z\in X$, что $x\wedge y=x\wedge z=0$, можно указать элемент $u\in X$, который удовлетворяет соотношениям $x\wedge u=0$, $u\geqslant y, z$[17]. Если для множества X справедлив *верхний дистрибутивный закон*, т. е. если для любых элементов $x, y, z\in X$ выполняется соотношение

$$x\wedge(y\vee z)=(x\wedge y)\vee(x\wedge z), \tag{12}$$

то условие (D) соблюдено для каждого элемента $x\in X$ — в качестве u, отвечающего элементам y, z, можно при наличии (12) взять $u=y\vee z$.

Лемма. *Если для каждого элемента* $q\in Q$ *соблюдено условие* (D), *то, каковы бы ни были элементы* $x, y\in X$, *справедливо равенство*

$$\pi^{-1}(x\vee y)=\pi^{-1}(x)\cup\pi^{-1}(y). \tag{13}$$

Доказательство. Ввиду монотонности отображения λ будем иметь $\pi^{-1}(x\vee y)\supset\pi^{-1}(x)\cup\pi^{-1}(y)$. Если

[17] При формулировке условия (D) нет надобности предполагать, что X — полная решетка. Достаточно, чтобы X было нижней решеткой, имеющей наименьший элемент.

q — такой элемент из Q, что $q\overline{\in}\pi^{-1}(x)\bigcup\pi^{-1}(y)$, то, как было установлено, $q\wedge x=q\wedge y=\mathbf{0}$. Стало быть, по условию найдется элемент $u\in X$, удовлетворяющий соотношениям $q\wedge y=\mathbf{0}$, $u\geqslant x$, y. Поскольку $u\geqslant x\vee y$, то и $q\wedge(x\vee y)=\mathbf{0}$, т. е. $\overline{q\in}\pi^{-1}(x\vee y)$, что вместе с предыдущим и доказывает (13).

Следствие 1. *В условиях леммы объединение конечного семейства ρ-компонент само является ρ-компонентой.*

Достаточно заметить, что пустое множество — объединение пустого семейства — является ρ-компонентой: $\varnothing=\pi^{-1}(\mathbf{0})$.

С помощью предложения VI из **2.2** получаем

Следствие 2. *В условиях леммы отображение λ сохраняет т. в. г. конечных множеств.*

Сформулируем наконец следующий результат.

Теорема 5(2.0). *В условиях леммы существует такая отделимая топология τ в множестве Q, что множество $\mathfrak{Q}$ всех ρ-компонент совпадает с совокупностью $\mathfrak{F}_\tau(Q)$ всех замкнутых множеств топологического пространства (Q, τ).*

Доказательство. Объединение любого конечного семейства множеств из $\mathfrak{Q}$ снова содержится в $\mathfrak{Q}$ (следствие 1 из леммы). Как вытекает из предложения II из **1.5**, пересечение любой совокупности ρ-компонент также будет ρ-компонентой. Как известно, эти условия достаточны (и необходимы) для существования такой топологии τ в Q, что $\mathfrak{Q}=\mathfrak{F}_\tau(Q)$.

Ввиду (11) при любом $q\in Q$ множество $\{q\}\in\mathfrak{Q}=\mathfrak{F}_\tau(Q)$, а замкнутость одноэлементных множеств равносильна отделимости топологии τ.

Следствие. *Если в условиях теоремы отображение λ взаимно-однозначно, то для множества X справедлив верхний дистрибутивный закон и усиленный нижний дистрибутивный закон: для любого множества $B\subset X$ и элемента $x\in X$ имеет место равенство*

$$x\vee\inf B=\inf_{y\in B}(x\vee^{*}y). \tag{14}$$

Действительно, при сделанных предположениях λ является изоморфизмом множества X на множество

$\mathfrak{F}_\tau(Q)$. Но для множества $\mathfrak{F}_\tau(Q)$ выполнение обоих дистрибутивных законов очевидно.

Сделаем в заключение два замечания.

Замечание 1. Пусть A — подмножество множества Q. В силу предложения I из **1.5** множество $\widetilde{A}$ является наименьшей ρ-компонентой, содержащей A. Таким образом, если удовлетворены условия теоремы, то $\widetilde{A}$ совпадает с замыканием $\overline{A}$ множества A в топологии τ. Привлекая (9), можем написать поэтому: $\overline{A} = [\leftarrow, \sup A] \cap Q$.

Замечание 2. В условиях теоремы невозможно высказать каких-либо дополнительных суждений о квалификации топологии τ.

Действительно, взяв в качестве X упорядоченную по включению совокупность всех замкнутых множеств отделимого топологического пространства T (роль Q при этом будет играть совокупность всех одноэлементных множеств), мы без труда докажем, что пространство (Q, τ) теоремы гомеоморфно пространству T.

0.2.6. Ситуация, описанная в предыдущем пункте, представляется достаточно исключительной, поскольку множество $X_0 = X \setminus \{0\}$ может не иметь нужного количества минимальных элементов, не говоря уже о том, что и требование к X — быть полной решеткой — также не из легких.

Описанная в этом и следующем пунктах конструкция позволяет так расширить данное упорядоченное множество X, что к расширенному множеству уже применимы построения предыдущего пункта.

Пока речь идет об определениях и о простейших следствиях из них, мы не будем делать об упорядоченном множестве X каких-либо специальных предположений. Как всегда, порядок в X обозначается через σ.

О множестве $A \subset X$ говорят, что оно *фильтруется по убыванию*, если любое конечное множество $K \subset A$ ограничено снизу в A, т. е. если пересечение $\pi_\sigma^{-1}(K) \cap A \neq \varnothing$. Аналогично дается определение множества, *фильтрующегося по возрастанию*.

Если множество A непусто, то в данном выше определении под K можно подразумевать лишь двухэлементные множества: множество $A \subset X$ фильтруется по убыванию, если $A \neq \varnothing$ и для любых элементов x, $y \in A$

в A найдется элемент z, меньший каждого из элементов x и y.

Пусть, кроме множества X, имеется еще одно упорядоченное множество Y (с порядком ρ).

I. *Если f — монотонное отображение множества X в множество Y и $A \subset X$ — фильтрующееся по убыванию множество, то образ $B = f[A]$ фильтруется по убыванию.*

Действительно, пусть L — конечное подмножество множества B. Очевидно, существует такое конечное множество $K \subset A$, что $L = f[K]$. Согласно сказанному в 1.8 $\pi_\sigma^{-1}(K) \subset f^{-1}[\pi_\rho^{-1}(L)]$, так что $\pi_\rho^{-1}(L) \supset f[\pi_\sigma^{-1}(K)]$. Следовательно,

$$\pi_\rho^{-1}(L) \cap B \supset f[\pi_\sigma^{-1}(K)] \cap f[A] \supset f[\pi_\sigma^{-1}(K) \cap A],$$

откуда вытекает, что $\pi_\rho^{-1}(L) \cap B \neq \varnothing$.

Фильтрующееся по убыванию множество $\varphi \subset X$ называется *фильтром* в X, если $\sigma[\varphi] \subset \varphi$, т. е. если φ вместе с каждым своим элементом содержит и все большие его. Фильтр в множестве X, снабженном обратным порядком, называется *возрастающим фильтром* в X. Таким образом, возрастающий фильтр G — это фильтрующееся по возрастанию множество, удовлетворяющее условию $\sigma^{-1}[G] \subset G$.

II. *Пусть $A \subset X$. Для того чтобы множество $\varphi = \sigma[A]$ было фильтром, необходимо и достаточно, чтобы множество A фильтровалось по убыванию.*

Действительно, если φ — фильтр и K — конечное подмножество множества A, то, поскольку $K \subset A \subset \subset \sigma[A] = \varphi$, пересечение $\pi_\sigma^{-1}(K) \cap \varphi \neq \varnothing$. Если $z \in \in \pi_\sigma^{-1}(K) \cap \varphi$, то в A найдется такой элемент x, что $z \in \in \sigma[x] = [x, \rightarrow]$, т. е. справедливо неравенство $x \leqslant z$. Но тогда, очевидно, $x \in \pi_\sigma^{-1}(K)$, так что $x \in \pi_\sigma^{-1}(K) \cap A$.

Предположим теперь, что A фильтруется по убыванию. Возьмем конечное множество $K \subset \varphi$. Очевидно, можно построить такое конечное множество $L \subset A$, что $K \subset \sigma[L]$. Но тогда

$$\pi_\sigma^{-1}(K) \supset \pi_\sigma^{-1}(\sigma[L]) = \bigcap_{x \in L} \pi_\sigma^{-1}(\sigma[x]) =$$
$$= \bigcap_{x \in L} \pi_\sigma^{-1}(x) = \pi_\sigma^{-1}(L)$$

и, следовательно, $\pi_\sigma^{-1}(K)\cap\varphi\supset\pi_\sigma^{-1}(L)\cap A\neq\varnothing$. Поскольку $\sigma\circ\sigma\subset\sigma$, то $\sigma[\varphi]=\sigma[\sigma[A]]\subset\sigma[A]]=\varphi$. Таким образом, φ — фильтр.

Множество $A\subset X$, связанное с фильтром φ соотношением $\varphi=\sigma[A]$, называется *базисом фильтра* φ. О фильтре σ говорят в этом случае, что он *порождается* фильтрующимся по убыванию множеством A.

В отличие от принятого ранее соглашения о порядке в множестве множеств совокупность $\mathfrak{X}$ всех фильтров в X снабдим порядком θ, обратным естественному: $(\varphi, \psi)\in\theta$ $(\varphi, \psi\in\mathfrak{X})$, если $\varphi\supset\psi$. Если $(\varphi, \psi)\in\theta$, то говорят, что фильтр φ *тоньше* фильтра ψ (или что фильтр ψ *грубее* фильтра φ) и пишут $\varphi\prec\psi$ или соответственно $\psi\succ\varphi$.

Пусть A, B — фильтрующиеся по убыванию множества в X. Если $\sigma[A]\prec\sigma[B]$, то говорят, что множество A *коинициально* (по отношению к множеству) B. Это означает, что для любого элемента $y\in B$ можно найти в A элемент x, меньший, чем y. В самом деле, соотношение $y\in B\subset\sigma[B]\subset\sigma[A]$ равносильно существованию такого $x\in A$, что $y\in\sigma[x]$. Обратно, если выполнено условие и $z\in\sigma[B]$, то, находя $y\in B$, а по нему в соответствии с условием $x\in A$, так чтобы было $z\in\sigma[y]$, $x\leqslant y$, можем написать: $z\in\sigma[y]\subset\sigma[x]\subset\sigma[A]$. Следовательно, $\sigma[A]\prec\sigma[B]$.

Аналогичная ситуация в случае, когда множества A и B фильтруются по возрастанию, обозначается словами: «A *конфинально* по отношению к B».

III. *Если множество* $\mathfrak{A}\subset\mathfrak{X}$ *фильтруется по убыванию* (*относительно порядка* θ), *то оно имеет т. н. г. При этом*

$$\theta\text{-}\inf\mathfrak{A}=\bigcup_{\varphi\in\mathfrak{A}}\varphi. \tag{15}$$

Действительно, положим $\psi=\bigcup_{\varphi\in\mathfrak{A}}\varphi$. Докажем, что множество ψ фильтруется по убыванию. Пусть K — конечное подмножество множества ψ. Очевидно, найдется такое конечное множество $\mathfrak{A}_0\subset\mathfrak{A}$, что $K\subset\bigcup_{\varphi\in\mathfrak{A}_0}\varphi$.

Так как $\mathfrak{A}_0$ ограничено снизу в $\mathfrak{A}$, то существует фильтр $\varphi_0\in\mathfrak{A}$, который тоньше каждого фильтра $\varphi\in\mathfrak{A}_0$, так что $\varphi_0\supset\bigcup_{\varphi\in\mathfrak{A}_0}\varphi\supset K$. Множество K ограничено снизу в φ_0 и тем более в ψ. Так как $\sigma[\psi] = \bigcup_{\varphi \in \mathfrak{A}} \sigma[\varphi] \subset \bigcup_{\varphi \in \mathfrak{A}} \varphi = \psi$, то ψ — фильтр в X. Согласно предложению VI из **2.2** $\psi = \theta^{-1}\text{-}\sup \mathfrak{A} = \theta\text{-}\inf \mathfrak{A}$.

Поскольку каждая непустая цепь фильтруется по убыванию (и по возрастанию), то множество $\mathfrak{X}$ в силу предложения III удовлетворяет условиям леммы Цорна, так что, каков бы ни был фильтр φ_0 в X, существует минимальный фильтр, более тонкий, чем φ_0.

Если само множество X фильтруется по убыванию (так будет, в частности, если X имеет наименьший элемент), то оно является, очевидно, фильтром и при том наименьшим элементом множества $\mathfrak{X}$. Фильтры, отличные от всего X, мы будем называть *собственными.*

IV. *Если множество X имеет наименьший элемент* $\mathbf{0}$, *то, каков бы ни был собственный фильтр* φ_0, *в множестве $\mathfrak{X}_0$ всех собственных фильтров существует минимальный фильтр, более тонкий, чем* φ_0.

Для доказательства заметим, во-первых, что если $\mathbf{0}$ входит в фильтр φ, то $X = \sigma[\mathbf{0}] \subset \sigma[\varphi] \subset \varphi$, т. е. $\varphi = X$. Поэтому если $\mathfrak{C}$ — непустая цепь в множестве $\mathfrak{X}_0$ и $\psi = \theta\text{-}\inf \mathfrak{C}$, то в силу (15) $\mathbf{0} \overline{\in} \psi$, так что $\psi \in \mathfrak{X}_0$. Тем самым множество $\mathfrak{X}_0$ удовлетворяет условию леммы Цорна, применение которой и приводит к требуемому результату.

Минимальный элемент множества $\mathfrak{X}_0$ называется *ультрафильтром.*

V. *В условиях предложения IV множество Q всех ультрафильтров служит нижним основанием множества $\mathfrak{X}_0$ всех собственных фильтров.*

Если $x \in X$, то множество $\sigma[x] = [x, \rightarrow]$, очевидно, является фильтром. Тем самым возникает отображение $\nu : x \rightarrow \sigma[x]$ множества X в множество $\mathfrak{X}$.

VI. *Отображение ν взаимно-однозначно и сохраняет т. в. г., а также т. н. г. конечных множеств.*

Взаимная однозначность отображения ν не нуждается в доказательстве. Рассмотрим множество $A \subset X$, которое обладает т. в. г. Пусть $u = \sup A$. Согласно теореме 3 $\bigcap_{x \in A} \sigma[x] = \sigma[u] = \nu(u)$. Таким образом, пересечение $\bigcap_{x \in A} \sigma[x]$ является фильтром, а тогда на основании предложения VI из **2.2** $\nu(u) = \theta^{-1}\text{-}\inf \nu[A] = \theta\text{-}\sup \nu[A]$.

Из доказанного вытекает, что отображение ν монотонно. Поэтому если K — конечное множество, имеющее т. н. г. v, то $\nu(v) \in \pi_\theta^{-1}(\nu[K])$. Пусть фильтр $\varphi \in \pi_\theta^{-1}(\nu[K])$. Так как для любого $x \in K$ должно быть $\varphi \prec \nu(x)$, то $x \in \varphi$, т. е. $K \subset \varphi$. Поэтому существует $z \in \pi_\sigma^{-1}(K) \cap \varphi$. Так как $z \leqslant v$, то и $v \in \varphi$. Следовательно, $\nu(v) = \sigma[v] \succ \varphi$. Это означает, что фильтр $\nu(v)$ является наибольшим элементом поляры $\pi_\theta^{-1}(\nu[K])$, так что $\nu(v) = \theta\text{-}\inf \nu[K]$.

С помощью предложения III получаем

VII. *Если φ — фильтр в X, то множество $\nu[\varphi]$ имеет т. н. г., причем* $\inf \nu[\varphi] = \varphi$.

Заметим сначала, что соотношения $x \in \varphi$ $(x \in X)$ и $\nu(x) = \sigma[x] \succ \varphi$ эквивалентны. Ввиду монотонности отображения ν множество $\nu[\varphi]$ фильтруется по убыванию (предложение I). Тем самым на основании предложения III

$$\inf \nu[\varphi] = \bigcup_{x \in \varphi} \nu(x) = \bigcup_{x \in \varphi} \sigma[x] = \sigma[\varphi] = \varphi.$$

Дадим в заключение характеристику ультрафильтров вида $\nu(x)$.

VIII. *Пусть X имеет наименьший элемент* $\mathbf{0}$. *Если χ — ультрафильтр, то существует* $\inf \chi$. *Если при этом $q = \inf \chi \neq \mathbf{0}$, то q — минимальный элемент множества $X_0 = X \setminus \{\mathbf{0}\}$ и $\chi = \sigma[q]$. Обратно, если q — минимальный элемент множества X_0, то $\sigma[q]$ — ультрафильтр.*

Действительно, пусть χ — ультрафильтр и $q \in \pi_\sigma^{-1}(\chi)$. Если при этом $q \neq \mathbf{0}$, то, так как $\chi \subset \sigma[q]$ и $\sigma[q] \in \mathfrak{X}_0$, должно быть $\chi = \sigma[q]$, так что q — наименьший элемент фильтра χ. Если $x < q$ $(x \in X)$, то, поскольку $x \in \pi_\sigma^{-1}(\mathfrak{X})$, из доказанного вытекает, что $x = \mathbf{0}$. Тем самым $[\leftarrow, q) \cap X_0 = \varnothing$, т. е. q — минимальный элемент множества X_0 (предложение I из **2.4**). Если в поляре $\pi_\sigma^{-1}(\chi)$ нет элементов, отличных от $\mathbf{0}$, то $\mathbf{0}$, очевидно, служит т. н. г. множества χ.

Рассмотрим теперь минимальный элемент q множества X_0. Учитывая, что $\sigma[q] \in \mathfrak{X}_0$, в соответствии с предложением III найдем ультрафильтр χ, более тонкий, чем фильтр $\sigma[q]$. Пусть $x \in \chi$. Так как $q \in \chi$, то в χ существует элемент y, меньший, чем x и q. Ввиду того, что $y \in [\leftarrow, q] \cap X_0$ (если $y = \mathbf{0}$, то $\chi = X$), вследствие минимальности элемента q должно быть $y=q$, так что $x\in\sigma[q]$. Таким образом, $\sigma[q]=\chi$.

0.2.7. Дальнейшие свойства множества $\mathfrak{X}$ всех фильтров в X мы выскажем, предполагая, что X — нижняя решетка, имеющая наименьший элемент **0** и наибольший элемент **1**. Это предположение сохраним до конца пункта.

Отметим сразу же, что при этом в определении фильтра можно требовать не только ограниченности снизу (в данном фильтре) любого конечного подмножества, но и принадлежность фильтру т. н. г. такого множества. Именно, если φ — фильтр в X и K — конечное подмножество множества φ, то, обозначая через z какой-нибудь элемент пересечения $\pi_\sigma^{-1}(K)\cap\varphi$, можем написать: $\inf K\in\sigma[z]\subset\bar{\sigma}[\varphi]\subset\varphi$.

Сделанное замечание позволяет дополнить результат предложения I из **2.6.**

I. *Пусть f — отображение множества X на некоторое множество Y. Если Y снабжено порядком ρ так, что отображение f сохраняет т. н. г. конечных множеств, то прообраз $\varphi\triangleq f^{-1}[\psi]$ фильтра ψ в Y является фильтром в X.*

В самом деле, пусть K — конечное подмножество множества φ, $u=\inf K$, $L=f[K]$. Так как f сохраняет т. н. г. конечных множеств, то существует т. н. г. множества L, причем $v=\inf L=f(\inf K)=f(u)$. Поскольку $L\subset\psi$, то $v\in\psi$, а тогда $u\in f^{-1}[\psi]=\varphi$, так что φ фильтруется по убыванию. Принимая во внимание, что f — монотонно, можем написать:

$$\sigma[\varphi]\subset(f^{-1}\circ\rho\circ f\circ f^{-1})[\psi]=f^{-1}[\rho[\psi]]\subset f^{-1}[\psi]=\varphi.$$

Рассмотрим множество $A\subset X$. Пусть Ξ — совокупность всех его конечных подмножеств. Для $\xi\in\Xi$ положим $u_\xi=\inf\xi$ и обозначим через $\bar{A}$ совокупность всех элементов вида u_ξ с $\xi\in\Xi$. Множество $\bar{A}$ фильтруется по убыванию: на основании предложения V из **2.2** $u_{\xi_1}\wedge u_{\xi_2}=u_{\xi_1\cup\xi_2}(\xi_1,\ \xi_2\in\Xi)$. Поскольку $u_{\{x\}}=x\,(x\in A)$, то $A\subset\bar{A}$.

II. *Т. н. г. множеств A и $\bar{A}$ существуют или нет одновременно. Если т. н. г. существуют, то $\inf A=\inf\bar{A}$. Фильтр $\sigma[\bar{A}]$ является самым грубым из фильтров, содержащих множество A.*

Действительно, поскольку $A=\bigcup_{\xi\in\Xi}\xi$, то $\pi_\sigma^{-1}(A)=$ $=\bigcap_{\xi\in\Xi}\pi_\sigma^{-1}(\xi)=\bigcap_{\xi\in\Xi}\pi_\sigma^{-1}(u_\xi)=\pi_\sigma^{-1}(\bar{A})$. Отсюда с помощью предложения II из **0.2.2** вытекает справедливость утверждения о т. н. г.

Так как $\bar{A}$ фильтруется по убыванию, то $\sigma[\bar{A}]$ — фильтр (предложение II из **2.6**), содержащий множество $\bar{A}$ и, значит, множество A. Если φ — какой-либо фильтр, содержащий множество A, то, очевидно, должно быть также $\varphi\supset\bar{A}$ и, следовательно, $\varphi\supset\sigma[\varphi]\supset\sigma[\bar{A}]$.

О фильтре $\sigma[\bar{A}]$ говорят, что он *порожден* множеством A.

III. *Множество $\mathfrak{X}$ всех фильтров в X вместе с порядком θ представляет собой полную решетку.*

В самом деле, пусть $\mathfrak{A}\subset\mathfrak{X}$. Рассмотрим пересечение $\psi=\bigcap_{\varphi\in\mathfrak{A}}\varphi$ и докажем, что $\psi\in\mathfrak{X}$. Пусть K — конечное подмножество множества ψ. Так как для каждого $\varphi\in\mathfrak{A}$ будет $K\subset\varphi$, то $\inf K\in\varphi$. Следовательно, $\inf K\in\psi$. Так как $\sigma[\psi]\subset\bigcap_{\varphi\in\mathfrak{A}}\sigma[\varphi]\subset\bigcap_{\varphi\in\mathfrak{A}}\varphi=\psi$, то ψ — фильтр в X. На основании предложения VI из **2.2** $\psi=\theta^{-1}\text{-}\inf\mathfrak{A}=\theta\text{-}\sup\mathfrak{A}$. Применение предложения I из **2.3** заканчивает доказательство.

Выясним смысл т. н. г. в множестве $\mathfrak{X}$. Рассмотрим множество $\mathfrak{A}\subset\mathfrak{X}$. Понятно, что поляра $\pi_\theta^{-1}(\mathfrak{A})$ состоит из всех фильтров, содержащих множество $A=\bigcup_{\varphi\in\mathfrak{A}}\varphi$; поэтому в силу предложения II фильтр φ_0, порожденный этим множеством, будет наибольшим элементом поляры $\pi_\theta^{-1}(\mathfrak{A})$, т. е. $\varphi_0=\inf\mathfrak{A}$.

Убедимся, что множество B всех элементов вида $\inf_{\varphi\in\mathfrak{A}_0}u_\varphi$, где $\mathfrak{A}_0$ — конечное подмножество множества $\mathfrak{A}$, а $u_\varphi\in\varphi$ $(\varphi\in\mathfrak{A}_0)$, представляет собой базис фильтра φ_0. Действительно, согласно уже цитированному предложению II фильтр φ_0 имеет базис $\bar{A}$, состоящий из всех элементов вида $\inf K$, где K — конечное подмножество множества A. Но в силу предложения V из **2.2** $\inf K=$ $=\inf_{\varphi\in\mathfrak{A}_0}(\inf(\varphi\cap K))=\inf_{\varphi\in\mathfrak{A}_0}u_\varphi$, где за $\mathfrak{A}_0$ взято такое конечное подмножество множества $\mathfrak{A}$, что $K\subset\bigcup_{\varphi\in\mathfrak{A}_0}\varphi$, и положено

$u_\varphi = \inf(\varphi \cap K)\,(\varphi \in \mathfrak{A}_0)$. Таким образом, $\bar{A} \subset B$. Включение $B \subset \bar{A}$ очевидно.

Заметим, что при образовании множества B элементы u_φ можно брать не из всего фильтра φ, а лишь из какого-либо его базиса.

Укажем еще, что в качестве множества, порождающего фильтр φ_0, можно взять объединение $\bigcup\limits_{\varphi \in \mathfrak{A}} A_\varphi$, где A_φ — множество, порождающее фильтр φ.

Если множество $\mathfrak{A}$ состоит из двух элементов φ и ψ, то в силу сказанного фильтр $\varphi \wedge \psi$ имеет базис, состоящий из элементов вида $u \wedge v$, где u и v — элементы базисов фильтров φ и ψ соответственно.

Так как любой базис фильтра X должен содержать элемент **0**, то

IV. *Пусть* φ, ψ — *фильтры в* X. *Для того чтобы* $\varphi \wedge \psi = X$, *необходимо и достаточно, чтобы существовали такие элементы* $x \in \varphi$, $y \in \psi$, *что* $x \wedge y = \mathbf{0}$, *т. е. чтобы* $\sigma[x] \wedge \sigma[y] = X$.

Поскольку $\mathfrak{X}$ — полная решетка, а в силу предложения V из **2.6** множество Q всех ультрафильтров в X является нижним основанием множества $\mathfrak{X}_0 = \mathfrak{X} \setminus \{X\}$ всех собственных фильтров, мы оказываемся в ситуации, которая изучалась в **2.5.** Как и там, через ρ будем обозначать соответствие из Q в $\mathfrak{X}$, состоящее из всех таких пар $(\chi, \varphi) \in Q \times \mathfrak{X}$, что $\chi \prec \varphi$. Упомянем также об отображении $\lambda : \varphi \to \overset{-1}{\pi_\rho}(\varphi) = [\leftarrow, \varphi] \cap Q$ $(\varphi \in \mathfrak{X})$. Множество $\lambda(\varphi)$ условимся обозначать через F_φ. Допуская некоторую непоследовательность, вместо $F_{\nu(x)} = F_{\sigma[x]}$ будем просто писать: F_x $(x \in X)$. Так как отображение λ сохраняет т. н. г. (предложение II из **2.5.**), то согласно предложению VII из **2.6** для произвольного фильтра φ в X будет

$$F_\varphi = \lambda(\varphi) = \lambda(\inf \nu[\varphi]) = \inf \lambda[\nu[\varphi]] = \bigcap_{x \in \varphi} F_x. \qquad (16)$$

Хотя предложение III из **2.5** об условиях взаимной однозначности отображения λ сохраняется, конечно, и в новой обстановке, можно заметить, однако, что оно применимо лишь в исключительных случаях: дело в том, что множество $\mathfrak{X}$ содержит, как правило, много «лишних» элементов, которые «не нужны» для описания

ρ-компонент. Поэтому в рассматриваемой ситуации целесообразнее ставить вопрос о взаимной однозначности «погружения» исходного множества X в множество всех ρ-компонент, т. е. о взаимной однозначности суперпозиции $\mu=\lambda\circ\nu$, сопоставляющей элементу $x\in X$ множество F_x.

V. *Для того чтобы отображение* $\mu=\lambda\circ\nu$ *было взаимно-однозначно, необходимо и достаточно, чтобы для любых таких элементов* x, $y\in X$, *что* $y<x$, *пересечение* $(\mathbf{0}, x]\cap D(y)\neq\varnothing$ $(D(y)=\{z\in X : y\wedge z=\mathbf{0}\})$.

Доказательство этого аналога предложения III из **2.5** проводится по той же схеме, что и в упомянутом случае.

Предположим, что μ взаимно-однозначно. Пусть $y<x$ $(x, y\in X)$. Поскольку оба отображения λ и ν монотонны, таким же будет и их суперпозиция μ. Поэтому $F_y\subset F_x$, причем ввиду взаимной однозначности отображения μ должно быть $F_y\neq F_x$. Возьмем такой ультрафильтр χ, что $\chi\in F_x$, но $\chi\overline{\in} F_y$. Так как $y\overline{\in}\chi$, то найдется элемент $u\in\chi$, удовлетворяющий условию $y\wedge u=\mathbf{0}$ (иначе $\sigma[y]\wedge\chi\in\mathfrak{X}_0$ и, следовательно, $\sigma[y]\wedge\chi=\chi$, т. е. $y\in\chi$). Тогда, разумеется, и $y\wedge(u\wedge x)=\mathbf{0}$. Так как $x\in\chi$, то $u\wedge x\in\chi$ и, значит, $u\wedge x\neq\mathbf{0}$. Тем самым $u\wedge x\in(\mathbf{0}, x]\cap\cap D(y)$.

Для доказательства достаточности условия введем соответствие ρ_0 из Q в X, полагая $\rho_0=\{(\chi, x)\in Q\times X : x\in\chi\}$. Понятно, что $\pi_{\rho_0}^{-1}(x)=F_x$. Докажем, что при любом $x\in X$ множество $\sigma[x]=[x, \rightarrow]$ является ρ_0^{-1}-компонентой. Как и в **2.5**, воспользуемся для этого критерием теоремы 1. Пусть $u\overline{\in}\sigma[x]$ $(u\in X)$. Положим $y=u\wedge x$ и, принимая во внимание, что $y<x$, найдем $z\in(\mathbf{0}, x]\cap D(y)$. Так как $z\neq\mathbf{0}$, то $F_z\neq\varnothing$. Пусть $\chi\in F_z$. Тогда

$$\pi_{\rho_0}(\chi)=\{v\in X : v\in\chi\}=\chi\supset\sigma[z]\supset\sigma[x].$$

Вместе с тем если бы было $u\in\pi_{\rho_0}(\chi)=\chi$, то и $y=u\wedge x\in\chi$, что противоречило бы соотношению $y\wedge z=\mathbf{0}$. Итак, для любого $x\in X$ имеем $\sigma[x]=\pi_{\rho_0}(\pi_{\rho_0}^{-1}(\sigma[x]))=\pi_{\rho_0}(F_x)$. Стало быть, если $F_{x_1}=F_{x_2}$ $(x_1, x_2\in X)$, то $\sigma[x_1]=\sigma[x_2]$, т. е. $x_1=x_2$.

Остановимся теперь на введенном в **2.5** условии (D). Напомним, что для элемента $x\in X$ соблюдено условие

(D), если множество $D(x)=\{z\in X : x\wedge z=0\}$ фильтруется по возрастанию и, стало быть, представляет собой возрастающий фильтр.

VI. *Если для каждого элемента фильтра* χ *соблюдено условие* (D), *то оно соблюдено и для* χ.

Действительно, пусть φ и ψ такие фильтры, что $\chi\wedge\varphi=\chi\wedge\psi=X$. Согласно предложению IV это означает, что существуют элементы $x\in\varphi$, $y\in\psi$, u, $v\in\chi$ такие, что $u\wedge x=v\wedge y=0$, так что x, $y\in D(u\wedge v)$. Поскольку $u\wedge v\in\chi$, множество $D(u\wedge v)$ фильтруется по возрастанию. Следовательно.

$$(\varphi\vee\psi)\cap D(u\wedge v)\supset(\sigma[x]\cap\sigma[y])\cap$$
$$\cap D(u\wedge v)=\pi_\sigma(\{x, y\})\cap D(u\wedge v)\neq\varnothing.$$

Еще раз применяя предложение IV, можем написать: $(\varphi\vee\psi)\wedge\chi\prec(\varphi\vee\psi)\wedge\sigma[u\wedge v]=X$, так что $(\varphi\vee\psi)\wedge\chi=X$.

Результат теоремы 5 применительно к рассматриваемому случаю может быть несколько уточнен.

Теорема 6(2.0). *Если для каждого элемента* x *множества* X *соблюдено условие* (D), *то в* Q *существует отделимая компактная топология* τ *такая, что множества вида* F_φ *с* $\varphi\in\mathfrak{X}$ *исчерпывают всю совокупность замкнутых множеств пространства* (Q, τ), *а множества вида* F_x $(x\in X)$ *образуют базис этой совокупности — каждое замкнутое множество допускает представление в виде пересечения некоторой совокупности множеств указанного вида.*

Доказательство. Согласно предложению VI для множества $\mathfrak{X}$ удовлетворены условия леммы из **2.5** и, значит, условия теоремы 5, применяя которую, убедимся в справедливости всех утверждений доказываемой теоремы, кроме утверждения о компактности топологии τ.

Чтобы установить этот результат, рассмотрим фильтр $\mathfrak{F}$ в множестве Φ_0 всех непустых замкнутых множеств пространства (Q, τ). Согласно предложению I множество $\lambda^{-1}[\mathfrak{F}]$ представляет собой фильтр в $\mathfrak{X}_0$, а тогда в силу предложения III из **2.6** $\varphi_0=\inf\lambda^{-1}[\mathfrak{F}]$ будет собственным фильтром в X. При этом $\lambda(\varphi_0)=$ $=\inf\lambda[\lambda^{-1}[\mathfrak{F}]]=\inf\mathfrak{F}=\bigcap_{F\in\mathfrak{F}} F$ и так как $\varphi_0\neq X$, то

$\lambda(\varphi_0) \neq \varnothing$. Таким образом, $\bigcap\limits_{F \in \mathfrak{F}} F \neq \varnothing$, а это и означает компактность пространства Q.

Результат теоремы может быть сформулирован в следующем виде.

Следствие. *В условиях теоремы существует компактное отделимое пространство Q и отображения μ множества X в совокупность $\mathfrak{F}(Q)$ всех замкнутых множеств пространства Q такие, что μ сохраняет точные границы конечных множеств и $\mu[X]$ является базисом совокупности $\mathfrak{F}(Q)$.*

Пространство Q называется *стоуновским компактом* упорядоченного множества X.

Отметим некоторые специальные случаи доказанной теоремы.

VII. *Если в условиях теоремы множество X удовлетворяет также условию: для любых таких элементов u, $v \in X$, что $u \wedge v = \mathbf{0}$, существуют элементы $x \in D(u)$, $y \in D(v)$, для которых $x \vee y = \mathbf{1}$, то стоуновский компакт множества X хаусдорфов.*

Действительно, пусть χ_1, $\chi_2 \in Q$ $(\chi_1 \neq \chi_2)$. Так как $\chi_1 \wedge \chi_2 = X$, то найдутся такие элементы $u \in \chi_1$, $v \in \chi_2$, что $u \wedge v = \mathbf{0}$. Если x, $y \in X$ удовлетворяют условию предложения: $x \in D(u)$, $y \in D(v)$, $x \vee y = \mathbf{1}$, то, обозначая через U и V дополнения (до Q) множеств F_x и F_y, соответственно будем иметь $U \cap V = (F_x \cup F_y)' = (F_{x \vee y})' = F'_1 = \varnothing$, а так как $F_x \cap F_u = F_{x \wedge u} = \varnothing$, то $\chi_1 \in F_u \subset F'_x = U$ и аналогично $\chi_2 \in V$. Остается заметить, что U и V — открытые множества.

VIII. *Если в условиях теоремы отображение μ взаимно-однозначно, то для множества X справедливы оба дистрибутивных закона; если для элементов x, y, $z \in X$ существуют т. в. г. $x \vee y$ и $(x \wedge z) \vee (y \wedge z)$, то*

$$z \wedge (x \vee y) = (x \wedge z) \vee (y \wedge z) \tag{17}$$

и если элементы x, y, $z \in X$ таковы, что существуют т. в. г. $x \vee z$, $y \vee z$, $z \vee (x \wedge y)$, то

$$z \vee (x \wedge y) = (z \vee x) \wedge (z \vee y). \tag{18}$$

В самом деле, учитывая, что μ сохраняет точные границы конечных множеств, можем написать (в предположениях первой части утверждения):

$$F_{z\wedge(x\vee y)}=F_z\cap(F_x\cup F_y)=(F_z\cap F_x)\cup(F_z\cap F_x)=F_{(z\wedge x)\vee(z\wedge y)},$$

откуда ввиду взаимной однозначности отображения μ вытекает (17). Аналогично доказывается (18).

IX. *Если в условиях предложения* VIII *стоуновский компакт Q хаусдорфов, то, каково бы ни было замкнутое множество F пространства Q, прообраз $\lambda^{-1}[F]$ имеет наибольший элемент. Им является фильтр ψ, состоящий из всех таких $x\in X$, что множество F_x служит окрестностью множества F.*

Обозначим через ψ совокупность всех таких $x\in X$, что F_x является окрестностью множества F. Используя то обстоятельство, что μ сохраняет точные границы конечных множеств, нетрудно понять, что ψ — фильтр в X. Пусть $x\in\psi$, $\varphi\in\lambda^{-1}[F]$. Так как согласно (16) $F=\bigcap\limits_{u\in\varphi}F_u$, а пространство Q компактно, то найдется такое $u\in\varphi$, что $F_u\subset F_x$, что ввиду взаимной однозначности отображения μ равносильно соотношению $u\leqslant x$, откуда следует, что $x\in\varphi$. Таким образом, $\varphi\prec\psi$, т. е. $\psi\in\pi_\theta(\lambda^{-1}[F])$.

Поскольку хаусдорфово компактное пространство регулярно, пересечение совокупности $\mathfrak{A}$ всех замкнутых окрестностей множества F совпадает с F. Таким образом,

$$F=\bigcap_{U\in\mathfrak{A}}U=\bigcap_{U\in\mathfrak{A}}\left(\bigcap_{F_z\supset U}F_z\right)=\bigcap_{x\in\psi}F_x=\lambda(\psi).$$

Следовательно, $\psi\in\lambda^{-1}[F]$.

Рассмотрим отделимое компактное пространство T и пусть X — такой базис его замкнутых множеств, что, во-первых, $\varnothing\in X$ и, во-вторых, если x, $y\in X$, то и $x\cap y\in X$. Проверим, что множество X удовлетворяет условиям теоремы 6.

Действительно, пусть $x\in X$; y_1, $y_2\in D(x)=\{y\in X : x\wedge y=0\}$. Поскольку объединение $F=y_1\cup y_2$ замкнуто, оно является пересечением фильтра φ всех множеств из X, содержащих F. Но $y_1\cup y_2\subset x'$, а множество x' открыто. Стало быть, ввиду компактности пространства T найдется $y\in\varphi$ так, что $y\subset x'$. Ясно, что $y\supset y_1$, y_2 и $y\in D(x)$.

Убедимся также, что для X соблюдено условие предложения V. В самом деле, пусть $y\subset x$ (x, $y\in X$, $x\neq y$). Возьмем точку t из пересечения $x\cap y'$. Так как множество y' является окрестностью точки t, а множество $\{t\}$ — замкнуто, то по тем же соображениям, что и выше, найдется $z \in X$ такое, что $t \in z \subset y'$. Ясно, что $z \cap x \neq \varnothing$ $(t \in z \cap x)$, $(z \cap x) \cap y = \varnothing$, $z \cap x \subset x$.

Рассмотрим $t \in T$ и обозначим через χ_t совокупность всех множеств из X, содержащих точку t. Нетрудно видеть, что χ_t — ультрафильтр в X: если $x_0 \overline{\in} \chi_t$, то $t \in x_0'$ и, значит, найдется множество $x \in \chi_t$, содержащееся в x_0', так что $x \cap x_0 = \varnothing$; поэтому x_0 не может входить ни в один собственный фильтр, более тонкий, чем χ_t.

Если наоборот, χ — ультрафильтр в X, то вследствие компактности пространства T найдется точка t из пересечения $\bigcap \{x : x \in \chi\}$. Ясно, что $\chi_t \prec \chi$ и, стало быть, $\chi = \chi_t$.

Отображение $f : t \to \chi_t$, $(t \in T)$ множества T на множество Q всех ультрафильтров в X взаимно-однозначно. Действительно, если t_1, $t_2 \in T$ $(t_1 \neq t_2)$, то множество $T \setminus \{t_2\}$, будучи окрестностью точки t_1, должно содержать некоторое множество $x \in \chi_{t_1}$. Ясно, что $x \in \chi_{t_2}$.

Докажем, наконец, что f — гомеоморфизм пространства T на стоуновский компакт Q множества X. Пусть F — замкнутое множество компакта Q. Положим

$$\varphi = \sup F = \bigcap_{\chi \in F} \chi; \quad H = \bigcap_{x \in \varphi} x.$$

Соотношение $t \in H$ равносильно тому, что $\chi_t \supset \varphi$, т. е. равенству $H = f^{-1}[F]$. Следовательно, f — непрерывно. Непрерывность обратного отображения f^{-1} доказывается аналогично.

Из сказанного получаем

X. *Если множество X удовлетворяет условиям теоремы 6 и Q — его стоуновский компакт, то стоуновский компакт множества* $\mu[X]$ *всех множеств вида* F_x $(x \in X)$ *гомеоморфен* Q.

0.2.8. С точки зрения теории упорядоченных множеств наивысшей квалификацией обладают упорядоченные множества, которые называются булевскими алгебрами.

Пусть X — решетка, обладающая наименьшим — $\mathbf{0}$ и наибольшим — $\mathbf{1}$ элементами. Элемент $x' \in X$ называется *дополнением* элемента $x \in X$, если $x' \wedge x = \mathbf{0}$, $x \vee x' = \mathbf{1}$. Понятно, что в случае, когда x обладает дополнением x', он служит дополнением своего дополнения.

Решетка X называется *булевской алгеброй*, если каждый элемент $x \in X$ обладает дополнением x' и, кроме того, для X соблюдены оба дистрибутивных закона (см. (17) и (18)):

$$(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z) \quad (x,\ y,\ z \in X); \tag{19}$$

$$(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z) \quad (x,\ y,\ z \in X). \tag{20}$$

Булевская алгебра X называется *полной*, если X представляет собой полную решетку.

Укажем важный для дальнейшего пример булевской алгебры. Рассмотрим множество T и отношение дизъюнктности δ в нем (см. **1.9**).

I. *Совокупность $\mathfrak{K}_\delta(T)$ всех δ-компонент множества T, упорядоченная по включению, представляет собой полную булевскую алгебру.*

Действительно, δ-компонента $H^d = \pi_\delta(H)$ $(H \in \mathfrak{K}_\delta(T))$ является в силу теоремы 2 дополнением компоненты H. На основании этой же теоремы компонента H^d служит наибольшим элементом множества $D(H) = \{K \in \mathfrak{K}_\delta(T) : K \cap H = Z\}$.Наконец, если компонента K содержится в компоненте H, причем $K \neq H$, то компонента $L = H \cap K^d$ отлична от наименьшей компоненты $Z = \pi_\delta(T)$, содержится в H и в множестве $D(K)$. В силу предложений V и VIII из **2.7** для множества $\mathfrak{K}_\delta(T)$ соблюдены оба дистрибутивных закона. Полнота решетки $\mathfrak{K}_\delta(T)$ установлена в предложении III из **2.3**.

Взяв в качестве δ соответствие $\delta = \{(s,\ t) \in T^2 : s \neq t\}$, получим, в частности, что совокупность $\mathfrak{K}_\delta(T)$ совпадает с совокупностью $\mathfrak{P}(T)$ всех подмножеств множества T, которая, таким образом, оказывается полной булевской алгеброй, в чем, правда, легко убедиться и непосредственно.

Отметим некоторые свойства булевских алгебр.

II. *Дополнение элемента x булевской алгебры X единственно.*

В самом деле, если, кроме дополнения x', элемент x имеет еще дополнение x^0, то на основании (19)

$$x^0 = x^0 \wedge \mathbf{1} = x^0 \wedge (x \vee x') = (x^0 \wedge x) \vee (x^0 \wedge x') =$$
$$= \mathbf{0} \vee (x^0 \wedge x') = x^0 \wedge x',$$

так что $x^0 \leqslant x'$. Точно так же и $x' \leqslant x^0$.

III. *Дополнение x' элемента x булевской алгебры X служит наибольшим элементом множества $D(x)=\{y\in\in X : x\wedge y=\mathbf{0}\}$.*

Действительно, очевидно, $x'\in D(x)$. Далее, используя (19), (20), для элемента $y\in D(x)$ можем написать: $x\wedge(y\vee x')=(x\wedge y)\vee(x\wedge x')=\mathbf{0}$. Так как, кроме того, $x\vee(y\vee x')=(x\vee x')\vee y=\mathbf{1}\vee y=\mathbf{1}$, в силу предложения II $y\vee x'=x'$, так что $y\leqslant x'$.

IV. *Пусть x и y — элементы булевской алгебры X, а x' и y' — их дополнения. Соотношения $x\leqslant y$, $x\wedge y'=\mathbf{0}$, $x'\geqslant y'$ эквивалентны.*

Действительно, из $x\leqslant y$ следует $x\wedge y'\leqslant y\wedge y'=\mathbf{0}$. Обратно, если $x\wedge y'=\mathbf{0}$, то, поскольку $y=(y')'$, на основании предложения III получим $x\leqslant y$.

Используя аналогичные соображения и учитывая уже доказанное, заключаем, что соотношение $x'\geqslant y'$ равносильно равенству $\mathbf{0}=y'\wedge(x')'=x\wedge y'$.

Если x, y — элементы булевской алгебры X, то элемент $x\wedge y'$ называется *разностью* элементов x и y и обозначается через $x\setminus y$. Элемент $x\triangle y=(x\setminus y)\vee(y\setminus x)$ называется *симметрической разностью* элементов x и y. Нетрудно проверить, что отображение $\gamma:(x, y)\to x\triangle y$ $((x, y)\in X^2)$ множества X^2 в X является групповой операцией в X. Элемент $\mathbf{0}$ служит при этом нейтральным элементом группы (X, γ). Поскольку $x\triangle x=\mathbf{0}$ для любого $x\in X$, каждый элемент группы (X, γ) — второго порядка.

Если обозначить через p отображение, сопоставляющее паре $(x, y)\in X^2$ элемент $x\wedge y$, то, присоединив к группе (X, γ) операцию p, получим, как можно доказать, кольцо (X, γ, p). Оно обладает единицей, роль которой, очевидно, играет наибольший элемент булевской алгебры X, т. е. $\mathbf{1}$.

Обозначим через Γ отображение булевской алгебры X в себя, которое сопоставляет элементу $x\in X$ его дополнение x'. Поскольку Γ является *инволюцией*, т. е. поскольку $\Gamma\circ\Gamma=I_X$, оно взаимно-однозначно и отображает X на все X. Если, как всегда, порядок в X обозначить через σ, то в силу предложения IV Γ является изоморфизмом упорядоченного множества (X, σ) на множество (X, σ^{-1}). Так как изоморфизм сохраняет, очевидно, точные границы, то из сказанного, в частности, следует, что если множество $A\subset X$ имеет т. в. г. (относительно порядка σ), то множество $\Gamma[A]$ имеет т. н. г. (также относительно σ), причем

$$\inf_{x\in A} x' = \inf \Gamma[A] = \Gamma(\sup A) = (\sup A)' \tag{21}$$

и при аналогичных предположениях

$$\sup_{x\in A} x' = \sup \Gamma[A] = \Gamma(\inf A) = (\inf A)'. \tag{22}$$

В булевской алгебре имеют место полные дистрибутивные законы.

V. *Если множество A булевской алгебры X имеет т. в. г. и $z\in X$, то семейство $\{z\wedge x\}$ $(x\in A)$ также имеет т. в. г., причем*

$$z\wedge \sup A = \sup_{x\in A} (z\wedge x). \tag{23}$$

Если у A существует т. н. г., то семейство $\{z\vee x\}$ $(x\in A)$ также имеет т. н. г. и

$$z\vee \inf A = \inf_{x\in A} (z\vee x). \tag{24}$$

Действительно, предположим, что существует $\sup A = u$. При любом $x\in A$ имеем $z\wedge x\leqslant z\wedge u$. Пусть $v\in X$ — такой элемент, что $z\wedge x\leqslant v$ для каждого $x\in A$. Согласно предложению IV это означает, что $x\wedge(z\wedge v') = (z\wedge x)\wedge v' = 0$, так что снова на основании цитированного предложения с учетом (22) $x\leqslant (z\wedge v')' = z'\vee v$. Следовательно, и $u = \sup A\leqslant z'\vee v$. Стало быть,

$$z\wedge u\leqslant z\wedge(z'\vee v) = (z\wedge z')\vee(z\wedge v) = z\wedge v\leqslant v,$$

откуда следует, что $z\wedge u = \sup\limits_{x\in A}(z\wedge x)$.

Равенство (24) обосновывается с помощью соотношений (21) и (22) на основе доказанного уже равенства (23).

Рассмотрим топологическое пространство T. Совокупность $\mathfrak{B}(T)$ всех его открыто-замкнутых множеств представляет собой, очевидно, булевскую алгебру. Этот пример оказывается универсальным.

Теорема 7(2.0). *Пусть X — булевская алгебра. Существует такое хаусдорфово компактное пространство Q, что совокупность $\mathfrak{B}(Q)$ всех его открыто-замкнутых множеств является базисом множества $\mathfrak{F}(Q)$ всех замкнутых множеств пространства Q, причем булевская алгебра X изоморфна упорядоченной по включению совокупности $\mathfrak{B}(Q)$.*

Доказательство. Согласно предложению III множество $D(x)=\{y\in X: x\wedge y=0\}$ при любом $x\in X$ имеет наибольший элемент — дополнение x' элемента x — и, следовательно, фильтруется по возрастанию. Таким образом, выполнены условия теоремы 6, на основании которой можно говорить о стоуновском компакте Q множества X. Если $y<x$ $(x, y\in X)$, то в силу предложения IV $z=x\wedge y'\in(0, x]\cap D(y)$, так что соблюдено и условие предложения V из **2.7** и, стало быть, отображение $\mu: x\to F_x$ взаимно-однозначно. Если $u, v\in X$ и $u\wedge v=0$, то элементы $x=u'$, $y=v'$ удовлетворяют соотношениям $x\in D(u)$, $y\in D(v)$, $x\vee y=(u\wedge v)'=0'=1$. Поэтому в силу предложения VII из **0.2.7** пространство Q хаусдорфово.

Так как для любого $x\in X$ будет $F_x\cup F_{x'}=F_{x\vee x'}=F_1=Q$ $F_x\cap F_{x'}=F_{x\wedge x'}=F_0=\varnothing$, то множество $F_{x'}$ служит дополнением множества F_x. Стало быть, последнее не только замкнуто, но и открыто. Пусть теперь F — открыто-замкнутое множество пространства Q. Поскольку F замкнуто, существует такой фильтр φ в X, что $F=F_\varphi=\bigcap\limits_{x\in\varphi} F_x$.

Будучи открытым, множество F служит своей собственной окрестностью, поэтому ввиду компактности пространства Q найдется такой $x\in\varphi$, что $F_x\subset F$, т. е. $F_x=F$.

Замечание 1. Нетрудно понять, что множество $\mathfrak{B}(Q)$ служит базисом и совокупности $\mathfrak{G}(Q)$ всех открытых множеств пространства Q — каждое открытое множество может быть представлено в форме объединения некоторой совокупности открыто-замкнутых множеств.

Замечание 2. В условиях теоремы введенное в **2.7** отображение $\lambda:\varphi\to F_\varphi(\varphi\in\mathfrak{X})$ множества $\mathfrak{X}$ всех фильтров в X на совокупность $\mathfrak{F}(Q)$ взаимно-однозначно.

Действительно, если $F=\lambda(\varphi)$, то $F=\bigcap\limits_{x\in\varphi} F_x$ и, следовательно, для любого $x\in\varphi$ множество F_x служит окрестностью множества F. В соответствии с предложением IX из **2.7** можно утверждать, что $x\in\psi$, где ψ — наибольший элемент множества $\lambda^{-1}[F]$. Таким образом, $\psi \prec \varphi$ и, значит, $\varphi=\psi$, т. е. множество $\lambda^{-1}[F]$ состоит из единственного элемента.

Замечание 3. В условиях теоремы отображение μ сохраняет точные границы. Действительно, пусть множество $A \subset X$ имеет т. в. г.: $\sup A = u$. Докажем, что $F_u = \overline{\bigcup_{x \in A} F_x}$. Согласно замечанию 1 к теореме 5 $\overline{\bigcup_{x \in A} F_x} = [\leftarrow, \theta\text{-}\sup \bigcup_{x \in A} F_x] \cap Q$. Но $\theta\text{-}\sup \bigcup_{x \in A} F_x = \theta\text{-}\sup_{x \in A} (\theta\text{-}\sup F_x) = \theta\text{-}\sup_{x \in A} [x, \rightarrow]' = \bigcap_{x \in A} [x, \rightarrow] = [u, \rightarrow]$. Таким образом, $\overline{\bigcup_{x \in A} F_x} = \{\chi \in Q : u \in \chi\} = F_u$. В множестве всех замкнутых множеств пространства Q будет $\sup_{x \in A} F_x = \overline{\bigcup_{x \in A} F_x}$. Сохранение т. н. г. доказывается с помощью соотношений (21) и (22).

Если булевская алгебра X полная, доказанная выше теорема может быть уточнена.

О топологическом пространстве T говорят, что оно *экстремально несвязно,* если замыкание каждого открытого множества пространства T открыто [18].

Теорема 8(2.0). *Для того чтобы булевская алгебра X была полной, необходимо и достаточно, чтобы ее стоуновский компакт был экстремально несвязным.*

Доказательство. Необходимость. Пусть X — полная булевская алгебра и G — открытое множество ее стоуновского компакта Q. Обозначим через A совокупность всех таких элементов $x \in X$, что $F_x \subset G$, и положим $u = \sup A$. Тогда согласно замечанию 1 к теореме 7 $G = \bigcup_{x \in A} F_x$ и на основании замечания 3 к теореме 7 $\bar{G} = F_u$, так что $\bar{G}$ — открыто-замкнутое множество.

Достаточность. Пусть $A \subset X$. Множество $G = \bigcup_{x \in A} F_x$ открыто, следовательно, если выполнены условия теоремы, его замыкание $\bar{G}$ также открыто и, разумеется, замкнуто, так что $\bar{G}$ входит в совокупность $\mathfrak{B}(Q)$ всех открыто-замкнутых множеств пространства Q. Но тогда, имея в виду упорядоченность по включению в

---

[18] Компактное экстремально несвязное пространство часто сокращенно называется *экстремальным компактом.*

множестве $\mathfrak{B}(Q)$, можем написать: $\overline{G}=\sup\limits_{x\in A} F_x=\sup \mu[A]$. Но μ — изоморфизм множества X на множество $\mathfrak{B}(Q)$. Поэтому существует $\sup A=\sup \mu^{-1}[\mu[A]]=\mu^{-1}(\sup \mu [A])=\mu^{-1}(\overline{G})$.

Замечание 4. Требование σ-полноты булевской алгебры X равносильно предположению о *квазиэкстремальности* стоуновского компакта Q, которое состоит в том, что замыкание каждого открытого множества типа F_σ открыто[19]. Используется также термин *квазиэкстремально несвязный* компакт.

0.2.9. Будем под X подразумевать нижнюю решетку, обладающую наименьшим элементом $\mathbf{0}$. Порядок в X обозначим, как всегда, через σ. Положим $\delta=\{(x, y)\in X^2 : x\wedge y=\mathbf{0}\}$.

I. *Соответствие* (δ, X, X) *является отношением дизъюнктности в* X.

Проверим указанные в **1.9** условия определения. Симметричность δ очевидна. Далее, наименьшая δ-компонента $Z=\pi_\delta(X)$ состоит из единственного элемента $\mathbf{0}$. Поскольку соотношение $x\wedge x=\mathbf{0}$ равносильно равенству $x=\mathbf{0}\in Z$, то выполнено и второе условие определения. Чтобы убедиться, что и третье условие соблюдено, заметим, что всякая δ-компонента H обладает свойством *нормальности*: $\sigma^{-1}[H]\subset H$. В самом деле, будучи δ-компонентой, множество H является δ-полярой некоторого множества $A\subset X$, т. е. $H=\pi_\delta(A)$. Если $x\in\sigma^{-1}[H]$, то в H найдется элемент y, больший, чем x. Поэтому для любого $z\in A$ будет $x\wedge z\leqslant y\wedge z=\mathbf{0}$. Следовательно, $x\in\pi_\delta(A)=H$. Рассмотрим элементы $x, y\in X$, удовлетворяющие условию $\widetilde{\{x\}}\cap\widetilde{\{y\}}=\{\mathbf{0}\}$. По доказанному $x\wedge y\in \sigma^{-1}[x]\cap\sigma^{-1}[y]\subset\widetilde{\{x\}}\cap\widetilde{\{y\}}=\{\mathbf{0}\}$. Таким образом, $x\wedge y=\mathbf{0}$.

В соответствии с доказанным мы будем в дальнейшем использовать обозначения и терминологию, введенные в **1.9**.

Заметим, что в силу предложения I из **2.8** совокупность $\mathfrak{K}_\delta(X)$ всех δ-компонент множества X, упорядо-

---

[19] О множестве E топологического пространства T говорят, что оно типа F_σ, если существует такое счетное семейство $\{F_\xi\}$ $(\xi\in\Xi)$ замкнутых множеств пространства T, что $E=\bigcup\limits_{\xi\in\Xi} F_\xi$.

ченная по включению, представляет собой полную булевскую алгебру.

II. *Каноническое отображение* $\varphi: x \to \{x\}^{dd}$ $(x \in X)$ *множества* X *в булевскую алгебру* $\mathfrak{K}_\delta(X)$ *сохраняет т. н. г. конечных множеств.*

Докажем сначала, что φ монотонно. Пусть $x \leqslant y$, $(x, y \in X)$. Так как $y \in \varphi(y)$, то в силу нормальности δ-компоненты $\varphi(y)$ должно быть $x \in \varphi(y)$ и, следовательно, $\varphi(x) \subset \varphi(y)$.

Пусть K — конечное множество в X. Если $K = \varnothing$, то существование $\inf K$ означает, что X имеет наибольший элемент $\mathbf{1}$, который и является т. н. г. пустого множества. Но тогда ввиду свойства нормальности δ-компонента $\varphi(\inf \varnothing) = \varphi(\mathbf{1})$ совпадает с X, а X, будучи наибольшей компонентой, есть т. н. г. пустого множества. В случае, когда $K \neq \varnothing$, можно считать, очевидно, что K состоит из двух элементов x и y. По доказанному имеем в этом случае $\varphi(x \wedge y) \subset \varphi(x) \cap \varphi(y)$. Возьмем

$$z \in (\varphi(x) \cap \varphi(y)) \cap [\varphi(x \wedge y)]^d - (\varphi(x) \cap \varphi(y)) \cap \{x \wedge y\}^d.$$

Учитывая, что $(z \wedge x) \wedge y = z \wedge (x \wedge y) = \mathbf{0}$, заключаем: $z \wedge x \in \{y\}^d = \varphi(y)^d$. Вместе с тем из соотношения $z \wedge x \leqslant z$ вытекает, что $z \wedge x \in \varphi(y)$. Таким образом, $z \wedge x \in \varphi(y) \cap \cap [\varphi(y)]^d = \{\mathbf{0}\}$, так что $z \wedge x = \mathbf{0}$, т. е. $z \in \{x\}^d = [\varphi(x)]^d$. Отсюда получаем, что $z \in \varphi(x) \cap [\varphi(x)]^d = \{\mathbf{0}\}$ и, следовательно, $z = \mathbf{0}$. Итак, доказано, что $[\varphi(x) \cap \varphi(y)] \cap [\varphi(x \wedge \wedge y)]^d = \{\mathbf{0}\}$. С помощью предложения IV из **2.8** и с учетом уже установленного приходим к равенству $\varphi(x \wedge \wedge y) = \varphi(x) \cap \varphi(y)$.

Элемент $u \in X$ называется *единицей* нижней решетки X, если $\varphi(u) = X$. Это означает, что $\{u\}^d = [\varphi(u)]^d = = X^d = \{\mathbf{0}\}$, т. е. что единственным элементом, дизъюнктным элементу u, является наименьший элемент $\mathbf{0}$. Понятно, что если в X имеется наибольший элемент, то он будет единицей. Вообще же не исключено, что множество E всех единиц пусто.

Рассмотрим конечное множество K единиц и предположим, что существует $\inf K$. Так как согласно предложению II $\varphi(\inf K) = \inf \varphi[K] = X$, то в случае, когда $E \neq \varnothing$, множество E фильтруется по убыванию и, следовательно, как очевидно, является фильтром в X. Этот фильтр называется *единичным фильтром* в X.

III. *Единичный фильтр нижней решетки X совпадает с т. в. г. множества Q всех ультрафильтров в X*[20].

Действительно, пусть $\chi \in Q$. Фильтр $\chi \wedge E$ — собственный, поскольку в противном случае нашлись бы элементы $x \in \chi$ и $u \in E$ так, что было бы $x \wedge u = \mathbf{0}$, однако это по определению фильтра E возможно лишь в случае $x = \mathbf{0}$. Так как $\chi \wedge E \prec \chi$, то, следовательно, $\chi \wedge E = \chi$, т. е. $\chi \prec E$. Таким образом, E — верхняя граница множества Q. Возьмем теперь элемент $u \in \bigcap\limits_{\chi \in Q} \chi = \sup Q$. Если $x \in \{u\}^d$ и $x \neq \mathbf{0}$, то найдется такой ультрафильтр χ_0, что $x \in \chi_0$. Но и $u \in \chi_0$, так что $\mathbf{0} = x \wedge u \in \chi_0$. Итак, $u \in E$, т. е. $\sup Q \prec E \prec \sup Q$.

IV. *Для того чтобы каноническое отображение множества X в булевскую алгебру $\mathfrak{K}_\delta(X)$ было взаимнооднозначно, необходимо и достаточно, чтобы X удовлетворяло условию* (E): *если элементы x, $y \in X$ таковы, что $y < x$, то* $(\mathbf{0}, x] \cap \{y\}^d \neq \varnothing$ (см. предложение III из **2.5** и предложение V из **2.7**).

Действительно, рассмотрим такие элементы x, $y \in X$, что $y < x$. В силу предложения II $\varphi(y) \subset \varphi(x)$ и если φ взаимно-однозначно, то $\varphi(y) \neq \varphi(x)$, так что $\varphi(x) \cap \cap [\varphi(y)]^d = \varphi(x) \cap \{y\}^d \neq \{\mathbf{0}\}$. Если $z \in \varphi(x) \cap \{y\}^d$, причем $z \neq \mathbf{0}$, то $z \wedge x \in \varphi(x) \cap \{y\}^d$. При этом $z \wedge x \neq \mathbf{0}$, поскольку в противном случае оказалось бы $z \in [\varphi(x)]^d$, что дало бы $z = \mathbf{0}$. Таким образом, $z \wedge x \in (\mathbf{0}, x] \cap \{y\}^d$.

Предположим теперь, что выполнено условие (E). Пусть x, $y \in X$ и $\varphi(x) = \varphi(y)$. На основании предложения II $\varphi(x \wedge y) = \varphi(x) = \varphi(y)$. Если $x \neq y$, то справедливо одно из двух соотношений: $x \wedge y < x$ или $x \wedge y < y$. Считая для определенности, что имеет место первое, можем написать:

$$\{\mathbf{0}\} \neq [\mathbf{0}, x] \cap \{x \wedge y\}^d \subset \varphi(x) \cap [\varphi(x \wedge y)]^d = \\ = \varphi(x) \cap [\varphi(x)]^d = \{\mathbf{0}\}.$$

Полученное противоречие доказывает достаточность условия.

---

[20] При этом предполагается, что совокупность $\mathfrak{X}$ всех фильтров в X снабжена введенным в **2.6** порядком $\theta = \{(\alpha, \beta) \in \mathfrak{X}^2 : \alpha \supset \beta\}$. Вместо $(\alpha, \beta) \in \theta$ будем писать здесь $\alpha \prec \beta$.

Предположим теперь, что множество X удовлетворяет условию (D): для каждого элемента $x \in X$ поляра $D(x) = \{x\}^d$ фильтруется по возрастанию и, стало быть, представляет собой возрастающий фильтр. При этих условиях справедливо

V. *Каноническое отображение множества X в булевскую алгебру $\mathfrak{K}_\delta(X)$ сохраняет т. в. г. конечных множеств.*

Действительно, пусть K — конечное множество в X. Предположим, что существует $\sup K = u$. Поскольку $K \subset [0, u]$, можем написать $K^d \supset [0, u]^d = \{u\}^d$. Возьмем $x \in \{K\}^d$. Так как $K \subset \{x\}^d$, а по условию множество $\{x\}^d$ — возрастающий фильтр, то и $\sup K = u \in \{x\}^d$, т. е. $x \in \{u\}^d$. Таким образом, $K^d = \{u\}^d$ и, следовательно, $K^{dd} = \{u\}^{dd} = \varphi(u)$. Остается заметить, что $K^{dd} = \left(\bigcup_{x \in K} \{x\}\right)^{dd} = \left(\bigcup_{x \in K} \varphi(x)\right)^{dd} = \sup \varphi[K]$.

Те же самые рассуждения приводят к такому факту.

VI. *Если множество X удовлетворяет условию (D) в усиленной форме: для любого $x \in X$ компонента $D(x) = \{x\}^d$ правильна* (см. **2.2**), *то каноническое отображение множества X в множество $\mathfrak{K}_\delta(X)$ сохраняет т. в. г. произвольных множеств.*

В случае, когда X — булевская алгебра, предыдущие рассмотрения приводят к следующей теореме.

Теорема 9(2.0). *Каноническое отображение φ булевской алгебры X в полную булевскую алгебру $\mathfrak{K}_\delta(X)$ взаимно-однозначно и сохраняет точные границы.*

Доказательство. Взаимная однозначность отображения φ следует из предложения IV, поскольку если $y < x$ ($x, y \in X$), то $x \wedge y' \in (0, x] \cap \{y\}^d$ (предложение IV из **2.8**). В силу (23) для X удовлетворены условия предложения V, так что φ сохраняет т. в. г. Далее, вследствие предложения II $\varphi(x) \cap \varphi(x') = \varphi(0) = \{0\}$, а по доказанному $\varphi(x) \vee \varphi(x') = \varphi(1) = X$. Следовательно, $\varphi(x') = [\varphi(x)]^d$. С помощью соотношений (21) и (22) выводим отсюда, что φ сохраняет и т. н. г.

Замечание 1. Если в условиях теоремы δ-компонента H имеет т.в.г., то $H = [0, \sup H]$, так что $\sup H$ является наибольшим элементом множества H.

В самом деле множество H, будучи пересечением правильных множеств вида $\{x\}^d$ само правильно. Значит, $\sup H \in H'$. А тогда ввиду нормальности множества H будет $[0, \sup H] \subset H \subset [0, \sup H]$. При этом $H = [0, \sup H]^{dd} = \{\sup H\}^{dd} = \varphi(\sup H)$.

З а м е ч а н и е 2. Если булевская алгебра X полная, то каноническое отображение φ является изоморфизмом алгебры X на алгебру $\mathfrak{K}_\delta(X)$, поскольку в силу замечания 1 для каждой δ-компоненты H будет $H = \varphi(\sup H)$, и, следовательно, областью значений отображения φ является вся алгебра $\mathfrak{K}_\delta(X)$.

Важный для приложений пример возникает, если взять в качестве X упорядоченную по включению совокупность $\mathfrak{G}$ всех открытых множеств данного топологического пространства T, которая, как нетрудно понять, является полной решеткой, в которой соблюдены полный верхний дистрибутивный закон и нижний дистрибутивный закон.

Согласно предложениям II и V каноническое отображение φ множества $\mathfrak{G}$ в множество $\mathfrak{K}_\delta(\mathfrak{G})$ всех δ-компонент сохраняет т. н. г. конечных множеств и т. в. г. произвольных множеств. С помощью предложения III нетрудно установить, что φ, вообще говоря, не взаимнооднозначно. Если принять $x = T$, а в качестве y взять открытое плотное в T, но отличное от T множество (такое существует, если в T найдется хотя бы одна неизолированная точка), то $(0, x] \cap \{y\}^d = \varnothing$.

Полная булевская алгебра $\mathfrak{G}^r(T) = \mathfrak{K}_\delta(\mathfrak{G})$ называется *булевской алгеброй регулярных открытых множеств* пространства T (истолкование термина будет дано в следующем пункте).

Предоставляем читателю проверить, что если в качестве X взять совокупность $\mathfrak{F}$ всех замкнутых множеств отделимого топологического пространства T, то булевская алгебра $\mathfrak{K}_\delta(\mathfrak{F})$ будет изоморфна булевской алгебре всех подмножеств множества T.

0.2.10. Если в условиях предыдущего пункта предъявить к X те или иные дополнительные требования, то можно указать различные реализации булевской алгебры $\mathfrak{K}_\delta(X)$ всех δ-компонент.

Под X будем подразумевать решетку, обладающую наименьшим элементом 0 и удовлетворяющую условию (D): для каждого $x \in X$ компонента $D(x) = \{x\}^d$ является возрастающим фильтром (см. 2.9). Так как любая δ-компонента H представляет собой пересечение некоторого множества компонент вида $\{x\}^d$ $(x \in X)$, то согласно предложению III из **2.7** H будет возрастающим фильтром.

Обозначим через $\mathfrak{F}$ совокупность всех возрастающих фильтров в X. Множество $\mathfrak{F}$ снабдим естественным порядком — по включению. Пусть $x \in X$. Множество $[0, x] \in \mathfrak{F}$. Следовательно, какова бы ни была δ-компонента H, пересечение $[0, x] \cap H$ также входит в $\mathfrak{F}$. Тем самым определено отображение $\Phi_H : x \to [0, x] \cap H$ $(x \in X)$ множества X в множество $\mathfrak{F}$.

I. *Отображение Φ_H сохраняет т. н. г.*

Действительно, если $A \subset X$ и существует $\inf A = u$, то по теореме 3 $[0, u] = \bigcap\limits_{x \in A} [0, x]$, так что, учитывая сказанное в **2.6** по поводу точных границ в множестве фильтров, будем иметь

$$\Phi_H(u) = [0, u] \cap H = \bigcap_{x \in A} ([0, x] \cap H) =$$
$$= \bigcap_{x \in A} \Phi_H(x) = \inf \Phi_H[A].$$

II. *Если в множестве X соблюден верхний дистрибутивный закон, то отображение Φ_H сохраняет т. в. г. конечных множеств.*

В самом деле, пусть K — конечное множество в X. Полагая $v = \sup K$, возьмем $z \in \Phi_H(u) = [0, u] \cap H$. Для $x \in K$ положим $u_x = z \wedge x$. Так как $u_x \leqslant z$, а $z \in H$, то и $u_x \in H$. Следовательно, $u_x \in [0, x] \cap H$ $(x \in K)$ и, значит, $\sup\limits_{x \in K} u_x \in \sup\limits_{x \in K} \Phi_H(x) = \sup \Phi_H[K]$. Но $\sup u_x = z \wedge \sup K = z$. Таким образом, $\Phi_H(u) \subset \sup \Phi_H[K]$. Обратное включение очевидным образом вытекает из монотонности Φ_H.

Рассмотрим множество $\mathfrak{F}^X$ всех отображений множества X в множество $\mathfrak{F}$ и снабдим его каноническим порядком (см. **2.1**): $\Phi_1 \leqslant \Phi_2$ $(\Phi_1, \Phi_2 \in \mathfrak{F}^X)$ означает, что $\Phi_1(x) \subset \Phi_2(x)$ для любого $x \in X$.

III. *Отображение $J : H \longrightarrow \Phi_H$ $(H \in \mathfrak{K}_\delta(X))$ алгебры $\mathfrak{K}_\delta(X)$ в множество $\mathfrak{F}^X$ взаимно-однозначно и сохраняет точные нижние границы непустых множеств.*

Действительно, взаимная однозначность отображения J вытекает из того, что в силу предложения III из **2.6** $\sup \Phi_H[X] = \sup\limits_{x \in X} \Phi_H(x) = \bigcup\limits_{x \in X} \Phi_H(x) = H$. Рассмотрим непустое множество $\mathfrak{H}$ δ-компонент и положим $H_0 = \inf \mathfrak{H} = \bigcap\limits_{H \in \mathfrak{H}} H$, $\Phi_0 = \inf J[\mathfrak{H}] = \inf\limits_{H \in \mathfrak{H}} \Phi_H$. Если взять $x \in X$, то

$$\Phi_0(x) = \inf_{H \in \mathfrak{H}} \Phi_H(x) = \inf_{H \in \mathfrak{H}} ([0, x] \cap H) =$$
$$= \bigcap_{H \in \mathfrak{H}} ([0, x] \cap H) = [0, x] \cap H_0 = \Phi_{H_0}(x),$$

так что $\Phi_0 = \Phi_{H_0}$.

Обозначим через $\mathfrak{M}$ совокупность всех отображений вида Φ_H с $H \in \mathfrak{K}_\delta(X)$. Если наделить $\mathfrak{M}$ порядком, индуцированным из $\mathfrak{F}^X$, то согласно предложению III отображение J будет изоморфизмом полной булевской алгебры $\mathfrak{K}_\delta(X)$ на $\mathfrak{M}$. Тем самым множество $\mathfrak{M}$ также будет полной булевской алгеброй.

Предположим, что для данных $x \in X$ и $H \in \mathfrak{K}_\delta(X)$ возрастающий фильтр $\Phi_H(x)$ имеет наибольший элемент. Его называют (*канонической*) *проекцией* элемента x на δ-компоненту H и обозначают через $\mathrm{Pr}_H x$. Таким образом, если существует проекция $\mathrm{Pr}_H x$, то

$$\Phi_H(x) = [0, x] \cap H = [0, \mathrm{Pr}_H x]. \tag{25}$$

Очевидно, $\mathrm{Pr}_H x \leqslant x$.

Ясно, что для $x \in H$ проекция $\mathrm{Pr}_H x$ существует и совпадает с x. Так как проекция $\mathrm{Pr}_H x$ любого элемента $x \in X$ содержится в H, то из сказанного следует, что δ-компонента H совпадает с множеством всех тех $x \in X$, для которых существует проекция $\mathrm{Pr}_H x$, равная x.

Аналогичным образом, дизъюнктное дополнение H^d δ-компоненты H может быть охарактеризовано как совокупность всех таких $x \in X$, что существует $\mathrm{Pr}_H x = \mathbf{0}$.

Действительно, если $x \in H^d$, то $\Phi_H(x) = [\mathbf{0}, x] \cap H \subset \subset H^d \cap H = \{\mathbf{0}\}$, так что в силу (25) $\mathrm{Pr}_H x = \mathbf{0}$, то, взяв $y \in H$ и заметив, что $x \wedge y \in H$, будем иметь $x \wedge y = \mathrm{Pr}_H(x \wedge y)$. Но ввиду того, что $\Phi_H(x \wedge y) \subset \Phi_H(x) = \{\mathbf{0}\}$, будет также и $\mathrm{Pr}_H(x \wedge y) = \mathbf{0}$. Следовательно, $x \wedge y = \mathbf{0}$, а так как y — произвольный элемент из H, то $x \in H^d$.

Предположим теперь, что δ-компонента H такова, что проекция $\mathrm{Pr}_H x$ существует для любого $x \in X$. Это позволяет говорить об отображении $P_H : x \longrightarrow \mathrm{Pr}_H x$

$(x \in H)$, которое называется *(дизъюнктным) проектором* на δ-компоненту H.

Из сказанного ранее следует:

$$H = \{x \in X : P_H(x) = x\}, \tag{26}$$

$$H^d = \{x \in X : P_H(x) = 0\}. \tag{27}$$

Соотношение (26) приводит, в частности, к *идемпотентности* отображения P_H, т. е. $P_H \circ P_H = P_H$.

Опираясь на предложение VI из 2.6, выводим из предложения I

IV. *Проектор P_H на δ-компоненту H сохраняет точные нижние границы непустых множеств.*

По образцу предложения II доказывается

V. Если в X соблюден полный верхний дистрибутивный закон, *то проектор P_H на δ-компоненту H сохраняет точные верхние границы.*

В самом деле, пусть A — множество в X, имеющие точную верхнюю границу. В силу предложения IV отображение P_H монотонно, поэтому элемент $u = P_H(\sup A)$ служит верхней границей множества $P_H[A]$. С другой стороны, если v — какая-либо верхняя граница этого множества, то, поскольку для любого $x \in A$ будет $u \wedge x \in [0, x] \cap [0, u] \subset [0, x] \cap H = [0, P_H(x)]$ и, стало быть, $u \wedge x \leqslant P_H(x) \leqslant v$, то $u = u \wedge \sup A = \sup\limits_{x \in A} (u \wedge x) \leqslant v$. Таким образом, u — наименьшая из верхних границ множества $P_H[A]$, т. е. $u = P_H(\sup A) = \sup P_H[A]$.

VI. *Если существуют дизъюнктные проекторы P_{H_1} и P_{H_2} на δ-компоненты H_1 и H_2, то существует и дизъюнктный проектор P_{H_0} на компоненту $H_0 = H_1 \cap H_2$. При этом $P_{H_0} = P_{H_2} \circ P_{H_1}$. Кроме того, для любого $x \in X$ будет $P_{H_0}(x) = P_{H_1}(x) \wedge P_{H_2}(x)$.*

В самом деле, для любого $x \in X$ согласно (25) имеем

$$[0, x] \cap H_0 = ([0, x] \cap H_1) \cap H_2 = [0, P_{H_1}(x)] \cap H_2 = \\ = [0, P_{H_2}(P_{H_1}(x))],$$

так что существует проекция $\mathrm{Pr}_{H_0} x = P_{H_2}(P_{H_1}(x))$. С помощью предложения III получаем далее

$$[0, P_{H_0}(x)] = \Phi_{H_0}(x) = \Phi_{H_1}(x) \cap \Phi_{H_2}(x) = \\ = [0, P_{H_1}(x)] \cap [0, P_{H_2}(x)] = [0, P_{H_1}(x) \wedge P_{H_2}(x)].$$

Если X — условно полная решетка и для каждого $x \in X$ множество $D(x) = \{x\}^d$ — правильно (как неоднократно упоминалось, последнее имеет место в случае, когда в X соблюден полный верхний дистрибутивный закон), то любая компонента, будучи пересечением компонент вида $D(x)$, также является правильным множеством. Следовательно, поскольку множество $\Phi_H(x)$ $(x \in X,\ H \in \mathfrak{K}_\delta(X))$ ограничено, существует $\sup \Phi_H(x)$, который входит в H, а значит, и в пересечение $[0, x] \cap H$. Таким образом, $\sup \Phi_H(x)$ служит канонической проекцией элемента x на δ-компоненту H, т. е. $\sup \Phi_H(x) = \mathrm{Pr}_H x$. Иначе можно сказать, что сделанные предположения гарантируют существование дизъюнктного проектора на любую δ-компоненту.

Сохраняя сформулированные выше условия о множестве X, введем совокупность X^X всех отображений множества X в себя, которую снабдим каноническим порядком.

VII. *Отображение $S: H \longrightarrow P_H$ $(H \in \mathfrak{K}_\delta(X))$ алгебры $\mathfrak{K}_\delta(X)$ в упорядоченное множество X^X взаимно-однозначно и сохраняет точные нижние границы непустых множеств.*

Действительно рассмотрим непустое множество $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{K}_\delta(X)$ и положим $H_0 = \inf \mathfrak{H}$. Для элемента $x \in X$ согласно предложению III можем написать:

$$[0, P_{H_0}(x)] = \Phi_{H_0}(x) = \inf_{H \in \mathfrak{H}} \Phi_H(x) = \\ = \bigcap_{H \in \mathfrak{H}} [0, P_H(x)] = [0, \inf_{H \in \mathfrak{H}} P_H(x)],$$

откуда $P_{H_0}(x) = \inf\limits_{H \in \mathfrak{H}} P_H(x) = (\inf\limits_{H \in \mathfrak{H}} P_H)(x)$, т. е. $P_{H_0} = \inf\limits_{H \in \mathfrak{H}} P_H = \inf S[\mathfrak{H}]$. Взаимная однозначность отображения S вытекает из соотношения $P_H[X] = H$, которое, очевидно, имеет место для любой δ-компоненты H.

Обозначим через $\mathfrak{P}$ совокупность проекторов на всевозможные δ-компоненты. Снабжая множество $\mathfrak{P}$ порядком, индуцированным из множества X^X, с помощью предложения VII выводим следующий результат.

Теорема 10(2.0). *Если X — условно полная решетка и каждая δ-компонента правильна, то для каждой δ-*

компоненты H существует дизъюнктный проектор P_H на нее и отображение, сопоставляющее δ-компоненте H проектор P_H, является изоморфизмом алгебры $\mathfrak{K}_\delta(X)$ на упорядоченное множество $\mathfrak{P}$.

Сохраняя предположения теоремы относительно множества X, рассмотрим множество $\mathfrak{K}_\delta^0(X)$ всех главных δ-компонент, т. е. δ-компонент, имеющих вид $\varphi(x)=\{x\}^{dd}$ $(x\in X)$.

VIII. *Множество* $\mathfrak{K}_\delta^0(X)$ *всех главных δ-компонент нормально в множестве* $\mathfrak{K}_\delta(X)$.

Для доказательства заметим сначала, что в силу предложения IV из **2.8** соотношения $H\cap\{u\}^d=H\cap\cap[\varphi(u)]^d=\{0\}$ и $H\subset\varphi(u)$ $(H\in\mathfrak{K}_\delta(X), u\in X)$ равносильны.

Возьмем теперь какую-либо главную компоненту H_0 и компоненту H, содержащуюся в H_0. Пусть $u_0\in\varphi^{-1}[H_0]$. Положим $u=P_H(u_0)$. Так как $u\in H$, то $\varphi(u)\subset H$. Рассмотрим элемент $z\in H\cap\{u\}^d$. Поскольку $z\in H$, то $z=P_H(z)$. Следовательно, на основании предложения IV $0=z\wedge u=P_H(z)\wedge P_H(u_0)=P_H(z\wedge u_0)$, т. е. в силу (27) $z\wedge u_0\in H^d$. Но одновременно $z\wedge u_0\in H$, так что $z\wedge u_0=0$ и в силу сделанного замечания $z=0$. Используя это же замечание, получаем, что $H\subset\varphi(u)$, т. е. $H=\varphi(u)$.

Из доказанного предложения следует, что если наибольшая компонента X — главная, то главными будут и все остальные компоненты, т. е. в этом случае $\mathfrak{K}_\delta^0(X)=\mathfrak{K}_\delta(X)$. Если $\mathbf{1}$ — какая-либо единица (см. **2.9**), то, как установлено при доказательстве предложения VIII, $H=\varphi(P_H(\mathbf{1}))$ для любой компоненты H.

Множество $\mathfrak{E}$ всех элементов вида $P_H(\mathbf{1})$ с $H\in\mathfrak{K}_\delta(X)$ — их называют *единичными* — снабдим порядком ε, индуцированным из X. С помощью предложения VI получаем.

IX. *Пусть упорядоченное множество X обладает единицей* $\mathbf{1}$. *Отображение* $\Theta: H\longrightarrow P_H(\mathbf{1})$ $(H\in\mathfrak{K}_\delta(X))$ *булевской алгебры* $\mathfrak{K}_\delta(X)$ *на множество $\mathfrak{E}$ всех единичных элементов является изоморфизмом. При этом для множества $E\subset\mathfrak{E}$ будет* $\varepsilon\text{-}\inf E=\sigma\text{-}\inf E$, *где через σ обозначен порядок в X.*

Действительно, взаимная однозначность отображения Θ вытекает из равенства $H=\varphi(\Theta(H))$. Далее, если $H_1\subset H_2$ $(H_1, H_2\in\mathfrak{K}_\delta(X))$, то на основании предложения

VII $\Theta(H_1)=\Theta(H_1\cap H_2)=P_{H_1}(P_{H_2}(1))\leqslant P_{H_2}(1)=\Theta(H_2)$. Наконец, обозначая $\mathfrak{H}=\Theta^{-1}[E]$ и $H_0=\inf\mathfrak{H}$, можем написать в соответствии с предложением VI:

$$\sigma\text{-}\inf E=\sigma\text{-}\inf\Theta[\mathfrak{H}]=\sigma\text{-}\inf_{H\in\mathfrak{H}}P_H(1)=P_{H_0}(1)=$$
$$=\Theta(\inf\mathfrak{H})=\varepsilon\text{-}\inf E.$$

Следует иметь в виду, что в доказанном соотношении нельзя заменить т. н. г. на т. в. г., даже в случае конечного множества E.

Понятно, что наибольший элемент $\mathbf{1}$ множества X годится на роль единицы. При этом

X. *Если множество X обладает наибольшим элементом $\mathbf{1}$, то $P_H(\mathbf{1})$ $(H\in\mathfrak{K}_\delta(X))$ является наибольшим элементом компоненты H, так что $H=\varphi(P_H(\mathbf{1}))=[0, P_H(\mathbf{1})]$.*

Действительно в силу (25) $[0, P_H(\mathbf{1})]=[0, \mathbf{1}]\cap H=X\cap H=H$.

Как и в **2.9**, рассмотрим совокупность $\mathfrak{G}$ всех открытых множеств топологического пространства T. Так как $\mathfrak{G}$ — полная решетка, в которой соблюден полный верхний дистрибутивный закон, то к множеству $X=\mathfrak{G}$ применимо все сказанное в этом пункте. В частности, если за единицу в $\mathfrak{G}$ взять наибольший элемент этого множества — само пространство T, то в силу предложения IX булевская алгебра $\mathfrak{G}^r=\mathfrak{K}_\delta(X)$ регулярных открытых множеств (см. **2.9**) изоморфна совокупности $\mathfrak{R}$ всех множеств вида $U=P_H(T)$ $(H\in\mathfrak{G}^r)$. Множества такого вида называются *регулярными*.

XI. *Пусть U — открытое множество пространства T. Следующие утверждения равносильны: (а) U — регулярное множество; (б) множество U является внутренностью своего замыкания, $U=\overline{U}^0$; (в) множество U является внутренностью некоторого замкнутого множества F, т. е. $U=F^0$.*

В самом деле, пусть U — регулярное множество. Положим $H=\varphi(U)$ и обозначим через V наибольший элемент компоненты $H^d=\{U\}^d$. Ясно, что V — это наибольшее открытое множество, содержащееся в дополнении U' (до T) множества U, т. е. $V=U'^0=U'$. Так как U — наибольший элемент компоненты $H=(H^d)^d$, а $H^d=\varphi(V)$, то по аналогичным соображениям $U=V'^0=$

$=\overline{U}^0$. Таким образом, из (а) вытекает (б), а из (б), очевидно, следует (в).

Предположим теперь, что $U=F^0$, где F — некоторое замкнутое множество. Если G — открытое множество, то соотношения $G\subset U$ и $G\in\{F'\}^d$ эквивалентны, так что U служит наибольшим элементом компоненты $\{F'\}^d$ и, стало быть, представляет собой регулярное множество (предложение X).

Совокупность $\mathfrak{R}$ всех регулярных открытых множеств согласно предложению IX изоморфна полной булевской алгебре $\mathfrak{G}^r(T)$. Выясним смысл точных границ в $\mathfrak{R}$. Что касается т. н. г., то согласно предложению IX она совпадает с т. н. г. в $\mathfrak{G}$, так что для $\mathfrak{A}\subset\mathfrak{R}$ будет $\inf\mathfrak{A}=$ $=\left(\bigcap\limits_{U\in\mathfrak{A}} U\right)^0$. Если $\mathfrak{A}$ — конечное множество, то $\inf\mathfrak{A}=$ $=\bigcap\limits_{U\in\mathfrak{A}} U$.

Положим теперь $U_0=\sup\mathfrak{A}$. Ясно, что $U_0\supset\bigcup\limits_{U\in\mathfrak{A}} U$. Следовательно, $U_0=\overline{U}_0^0\supset\overline{\left(\bigcup\limits_{U\in\mathfrak{A}} U\right)}^0$ и так как $\overline{\left(\bigcup\limits_{U\in\mathfrak{A}} U\right)}^0\in\mathfrak{R}$, то $U_0=\overline{\left(\bigcup\limits_{U\in\mathfrak{A}} U\right)}^0$.

Из доказательства предложения XI вытекает, что дополнение (в $\mathfrak{R}$) элемента $U\in\mathfrak{R}$ есть множество $V=U'^0=\overline{U}'$. В этом легко убедиться и непосредственно: $U\cap V=\varnothing, U\vee V=\overline{(U\cup V)}^0=(\overline{U}\cup\overline{V})^0\supset(\overline{U}\cup\overline{U}')^0=T$.

Предположим, что Q — хаусдорфов компакт. Стоуновский компакт Ω полной булевской алгебры $\mathfrak{G}_r(Q)$ регулярных открытых множеств пространства Q мы будем называть *регулярным расширением* данного компакта Q.

Поскольку отображение $G\longrightarrow\overline{G}$ ($G\in\mathfrak{G}_r(Q)$) является изоморфизмом булевской алгебры $\mathfrak{G}_r(Q)$ на булевскую алгебру $\mathfrak{F}_r(Q)$ всех *замкнутых* регулярных множеств пространства Q (обратное отображение есть $H\longrightarrow H^0$ ($H\in\mathfrak{F}_r(Q)$)), можно трактовать Ω как стоуновский компакт алгебры $\mathfrak{A}=\mathfrak{F}_r(Q)$. Для выяснения связей между Ω и Q такая точка зрения на Ω оказывается удобнее. В соответствии с этим под регулярным понимается *замкнутое* регулярное множество.

Фильтр (в алгебре $\mathfrak{A}$) регулярных окрестностей замкнутого множества F пространства Q мы будем обозначать через $\mathfrak{B}(F)$ (а если F состоит из одной точки q, то через $\mathfrak{B}(q)$). Пусть ω — точка компакта Ω, т. е. ультрафильтр в алгебре $\mathfrak{A}$. Если замкнутое множество F пространства Q таково, что $\omega \prec \mathfrak{B}(F)$, то в F найдется такая точка q, что $\omega \prec \mathfrak{B}(q)$. Действительно, в противном случае для каждой точки $q \in F$ найдутся окрестность $V_q \in \mathfrak{B}(q)$ и множество $U_q \in \omega$ так, что $U_q \wedge V_q = \overline{U_q^0 \cap V_q^0} = \varnothing$. Поскольку семейство $\{V_q^0\}$ $(q \in F)$ служит открытым покрытием множества F, то существует такое конечное множество $K \subset F$, что $\bigcup_{q \in K} V_q^0 \supset F$. Так как $V = \sup_{q \in K} V_q = \bigcup_{q \in K} V_q \supset \bigcup_{q \in K} V_q^0$, то $V \in \mathfrak{B}(F)$ и тем более $V \in \omega$. Обозначим $U = \inf_{q \in K} U_q$. Для каждого $q \in K$ будет $V_q \wedge U \subset V_q \wedge U_q = \varnothing$ и потому вследствие дистрибутивности булевской алгебры $V \wedge U = \sup_{q \in K} (V_q \wedge U) = \varnothing$. Но ввиду конечности множества K должно быть $U \in \omega$ и, следовательно, $V \cap U \neq \varnothing$.

Если q — такая точка из F, что $\omega \prec \mathfrak{B}(q)$, то $F_\omega = \bigcap_{H \in \omega} H \subset \bigcap_{U \in \mathfrak{B}(q)} U = \{q\}$. Поскольку ω, рассматриваемое как совокупность непустых замкнутых множеств пространства Q, фильтруется по убыванию, множество F_ω непусто и, значит, состоит из единственного элемента.

Так как для каждого $\omega \in \Omega$ имеем $\omega \prec \{Q\} = \mathfrak{B}(Q)$, то отображение Φ, сопоставляющее точке $\omega \in \Omega$ единственную точку множества F_ω будет определено на всем компакте Ω. В соответствии с этим определением, если $\omega \in \Omega$ и $q \in Q$ связаны соотношением $q = \Phi(\omega)$, то $\bigcap_{H \in \omega} H = \{\Phi(\omega)\}$ и $\omega \prec \mathfrak{B}(q)$.

Если F — замкнутое множество компакта Q, то $\Phi^{-1}[F] = \Omega_F = \{\omega \in \Omega : \omega \prec \mathfrak{B}(F)\}$. В самом деле, из доказанного выше следует, что $\Phi[\Omega_F] \subset F$, так что $\Omega_F \subset \Phi^{-1}[F]$. Если же $\omega \in \Phi^{-1}[F]$, то $q = \Phi(\omega) \in F$ и, следовательно, $\omega \prec \mathfrak{B}(q) \prec \mathfrak{B}(F)$, т. е. $\omega \in \Omega_F$. Отметим, что если H — регулярное множество компакта Q, т. е. если $H \in \mathfrak{A}$, то на основании теоремы 7 множество Ω_H совпадает с множеством $\{\omega \in \Omega : H \in \omega\}$ и, стало быть, открыто-замкнуто (в Ω). Отсюда следует, в частности, что отображение $H \longrightarrow \Phi^{-1}[H]$ $(H \in \mathfrak{A})$ осуществляет изоморфизм алгебры $\mathfrak{A}$ на алгебру всех открыто-замкнутых множеств компакта Ω.

Подводя итоги сказанному, можем сформулировать следующее предложение.

VII. *Существует такое непрерывное отображение* Φ *компакта* Ω *на компакт* Q, *что* $\Phi^{-1}[\overline{F^0}] = (\Phi^{-1}[F])^0$ *для произвольного замкнутого множества* F *пространства* Q. *В частности, если* F *нигде не плотно, то нигде не плотным (в* Ω*) будет и его прообраз* $\Phi^{-1}[F]$.

Действительно, для произвольной точки $q \in Q$ будет $\Phi^{-1}[q] = \Omega_{\{q\}} \neq \varnothing$, так что область значений отображения Φ есть все Q. Поскольку множество Ω_F замкнуто в Ω, то Φ непрерывно.

Пусть, наконец, F — замкнутое множество пространства Q. Множество $H = \overline{F^0}$ есть наибольшее регулярное множество, содержащееся в F, поэтому $\Omega_H = \Phi^{-1}[H]$ представляет собой наибольшее открыто-замкнутое множество, содержащееся в Ω_F, т. е., поскольку компакт Ω экстремально несвязен, $\Phi^{-1}[\overline{F^0}] = \Omega_H = (\Omega_F)^0 = (\Phi^{-1}[F])^0$.

0.2.11. Рассмотрим нижнюю решетку X (с порядком σ), обладающую наименьшим — $\mathbf{0}$ и наибольшим — $\mathbf{1}$ элементами, и упорядоченное множество Y (с порядком ρ). Предположим, что имеется отображение f множества X на множество Y, сохраняющее т. н. г. конечных множеств. Как нетрудно понять, множество Y оказывается при этом нижней решеткой: если $y_1, y_2 \in Y$ и $x_i \in f^{-1}[y_i]$ ($i = 1, 2$), то $f(x_1 \wedge x_2) = f(x_1) \wedge f(x_2) = y_1 \wedge y_2$. Поскольку $Y = f[X] = f[[\mathbf{0}, \mathbf{1}]] \subset [f(\mathbf{0}), f(\mathbf{1})]$, то элемент $\bar{0} = f(\mathbf{0})$ будет наименьшим, а $\bar{1} = f(\mathbf{1})$ — наибольшим элементом множества Y.

Множество всех фильтров в X обозначим через $\mathfrak{X}$, всех фильтров в Y — через $\mathfrak{Y}$. Множества $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ упорядочим в соответствии со сказанным в **2.6** с помощью порядка, обратного по отношению к порядку по включению. Пусть, далее, Q и R — множества всех ультрафильтров в X и соответственно в Y. Положим еще $Q_0 = \{\chi \in Q : \chi \cap f^{-1}[\bar{0}] = \varnothing\}$.

I. *Если* $\chi \in Q_0$, *то множество* $\omega = f[\chi]$ *является ультрафильтром в* Y, *причем* $\chi = f^{-1}[\omega]$.

Действительно, в силу предложения I из **2.6** $f[X]$ фильтруется по убыванию. Кроме того, так как $\bar{0} \notin f[\chi]$, то фильтр $\psi = \rho[f[\chi]]$ — собственный. Обозначим через ω_0 какой-нибудь ультрафильтр в Y, более тонкий, чем фильтр ψ. Поскольку

$$\chi \subset (f^{-1} \circ f)[\chi] \subset (f^{-1} \circ \rho \circ f)[\chi] = f^{-1}[\psi] \subset f^{-1}[\omega_0],$$

а фильтр $f^{-1}[\omega_0]$ — собственный, то $\chi=f^{-1}[f[\chi]]=f^{-1}[\omega_0]$, так что $\omega=\psi=f[\chi]=\omega_0$, что и требовалось доказать.

Согласно доказанному предложению отображение $f^*:\chi\longrightarrow f[\chi]$ $(\chi\in Q_0)$ множества Q_0 в множество R взаимно-однозначно. Обозначим через R_0 область значений этого отображения, т. е. множество всех $\omega\in R$, представимых в виде $\omega=f[\chi]$ с $\chi\in Q_0$. Так как соотношения $\omega=f[\chi]$ и $\chi=f^{-1}[\omega]$ эквивалентны, то $f^{*-1}(\omega)=f^{-1}[\omega]$ $(\omega\in R_0)$. Рассмотрим фильтры $\varphi\in\mathfrak{X}$ и $\psi\in\mathfrak{Y}$ и положим $F_\varphi=\{\chi\in Q:\chi\prec\varphi\}$, $H_\psi=\{\omega\prec R:\omega\prec\psi\}$[21].

II. *Если* $\varphi\in\mathfrak{X}$, $\psi\in\mathfrak{Y}$, *то*

$$f^*[F_\varphi]=H_{\rho[f[\varphi]]}\cap R_0,\quad f^{*-1}[H_\psi]=F_{f^{-1}[\psi]}\cap Q_0. \qquad (28)$$

В самом деле, пусть $\chi\in F_\varphi\cap Q_0$. Тогда $f^*(\chi)=f[\chi]\supset f[\varphi]$ и, следовательно, $f^*(\chi)\prec\rho[f[\varphi]]$. Таким образом, $f^*[F_\varphi]\subset H_{\rho[f[\varphi]]}\cap R_0$. Далее, если $\omega\in H_\psi\cap R_0$, то $f^{*-1}(\omega)=f^{-1}[\omega]\prec f^{-1}[\psi]$. Стало быть, $f^{*-1}[H_\psi]\subset\subset F_{f^{-1}[\psi]}\cap Q_0$. Поэтому, учитывая, что $\varphi\succ(f^{-1}\circ\rho\circ f)[\varphi]$, получим

$$f^*[F_\varphi]\subset H_{\rho[f[\varphi]]}\cap R_0\subset f^*[f^{*-1}[H_{\rho[f[\varphi]]}]]\subset$$
$$\subset f^*[F_{(f^{-1}\circ\rho\circ f)[\varphi]}]\subset f^*[F_\varphi].$$

Аналогично

$$f^{*-1}[H_\psi]\subset F_{f^{-1}[\psi]}\cap Q_0\subset f^{*-1}[f^*[F_{f^{-1}[\psi]}]]\subset$$
$$\subset f^{*-1}[H_{f[f^{-1}[\psi]]}]=f^{*-1}[H_\psi],$$

что и доказывает (28).

Будем понимать под δ каноническое отношение дизъюнктности в X (см. предложение I из 2.9). Положим, кроме того, $\psi_0=\sup R$, $\varphi_0=f^{-1}[\psi_0]$ (см. предложение III из 2.9).

III. *Если выполнено условие*

$$\delta[\varphi_0]\supset f^{-1}[\overline{0}], \qquad (29)$$

то, каков бы ни был ультрафильтр $\omega\in R$, *прообраз* $f^{-1}[\omega]$ *является ультрафильтром из* Q_0, *так что областью*

[21]) Знаком $\prec$ мы обозначаем отношение порядка в $\mathfrak{X}$ и в $\mathfrak{Y}$.

значений отображения f^* *служит все множество* $R:R_0=R$.

В самом деле, учитывая, что фильтр $\varphi=f^{-1}[\omega]$ — собственный, найдем ультрафильтр χ в X, более тонкий, чем φ. Так как $\omega<\psi_0$, то $\chi<\varphi=f^{-1}[\omega]<\varphi_0$ и, следовательно, $\delta[\chi]\supset\delta[\varphi_0]\supset f^{-1}[\bar{0}]$. Поэтому если $x\in f^{-1}[\bar{0}]$, то в χ можно указать такой элемент x_0, что $x\wedge x_0=\mathbf{0}$. Отсюда вытекает, что $\bar{x}\in\chi$, так что $\chi\cap f^{-1}[\bar{0}]=\varnothing$, т. е. $\chi\in Q_0$. Но тогда $f^*(\chi)=f[\chi]\supset f[\varphi]=\omega$. Стало быть, $f^{-1}[\omega]=\chi$.

Предположим, что для множеств X и Y удовлетворены условия теоремы 6, так что в множествах Q и R может быть в соответствии с цитированной теоремой введена компактная отделимая топология. Принимая во внимание результаты теоремы 6 и предложения II, убедимся, что отображение f^* является гомеоморфизмом подпространства Q_0 компакта Q на подпространство R_0 компакта R. Если при этом соблюдено условие (29) предложения III, то $R_0=R$ и, следовательно, компакт R гомеоморфен подпространству Q_0. В частности, имеет место

Теорема 11(2.0). *Пусть множества X и Y удовлетворяют условию (D) и $f^{-1}[\bar{0}]=\{0\}$. Тогда стоуновские компакты Q и R множеств X и Y соответственно гомеоморфны.*

Замечание. Если вместо условия $f^{-1}[\bar{0}]=\{0\}$ выполнено лишь более слабое условие (29), но зато компакт Q хаусдорфов, то компакт R гомеоморфен замкнутому подпространству Q_0 компакта Q и тем самым также является хаусдорфовым пространством.

Действительно, множество Q_0, будучи непрерывным образом компактного пространства R, компактно в Q и, следовательно, ввиду хаусдорфовости пространства Q замкнуто.

IV. *Если X — нижняя решетка, обладающая наименьшим и наибольшим элементами и удовлетворяющая условию (D), то множество $\mathfrak{X}$ всех фильтров в X также удовлетворяет условию (D) и его стоуновский компакт гомеоморфен стоуновскому компакту множества X.*

Действительно, то, что $\mathfrak{X}$ удовлетворяет условию (D), есть следствие предложения VI из **2.7**.

Обозначим через Q стоуновский компакт множества X и через $\mathfrak{F}(Q)$ — совокупность всех замкнутых множеств пространства Q. Отображение $\lambda:\varphi\longrightarrow F_\varphi=\{\chi\in\in Q:\chi\prec\varphi\}$ $(\varphi\in\mathfrak{X})$ согласно теореме 6 является отображением множества $\mathfrak{X}$ на все множество $\mathfrak{F}(Q)$. В силу предложения II из 2.5 λ сохраняет т. н. г. Поскольку $\lambda^{-1}[\varnothing]=\{X\}$, то применима теорема 11, вследствие чего стоуновский компакт множества $\mathfrak{X}$ гомеоморфен стоуновскому компакту множества $\mathfrak{F}(Q)$, который согласно предложению X из 2.7 гомеоморфен пространству Q.

Заметим, что в доказанном предложении под $\mathfrak{X}$ можно было подразумевать совокупность не всех фильтров, а только тех, которые тоньше единичного фильтра E в X (см. предложение III из 2.9). Это замечание позволяет несколько расширить понятие стоуновского компакта. Пусть X — нижняя решетка с наименьшим элементом, удовлетворяющая условию (D) и имеющая хотя бы одну единицу. Тогда множество $\mathfrak{X}_0$ всех фильтров в X, более тонких, чем единичный фильтр E, удовлетворяет условиям теоремы 6 и, стало быть, обладает стоуновским компактом, который мы и принимаем по определению за *стоуновский компакт* данного множества X.

Важно отметить, что теорема 11 остается справедливой и при таком понимании стоуновского компакта.

Действительно, в условиях теоремы 11 фильтр $G=\rho[f[E]]$ будет единичным фильтром в множестве Y: если $y\in\rho[f(e)]$ при некотором $e\in E$ и v — такой элемент из Y, что $v\wedge y=\bar{0}$, то, взяв $u\in f^{-1}[v]$, можем написать: $\bar{0}=v\wedge y=f(u)\wedge f(e)=f(u\wedge e)$; следовательно, $u\wedge e=\bar{0}$, и так как $e\in E$, то $u=0$, $v=f(0)=\bar{0}$. Далее, понятно, что если фильтр $\varphi\prec E$, то $\rho[f[\varphi]]\prec\rho[f[E]]=G$. Наконец, для фильтра ψ в Y такого, что $\psi\prec G$, фильтр $\varphi=f^{-1}[\psi]$, очевидно, тоньше единичного фильтра E в X. Таким образом, понимая под $\mathfrak{X}_0$ и $\mathfrak{Y}_0$ множества всех фильтров в X и соответственно в Y, более тонких, чем соответствующие единичные фильтры E и G, мы видим, что $\bar{f}:\varphi\longrightarrow\rho[f[\varphi]]$ $(\varphi\in\mathfrak{X}_0)$ будет отображением множества $\mathfrak{X}_0$ на множество $\mathfrak{Y}_0$. Докажем еще, что $\bar{f}$ сохраняет т. н. г. Если $\mathfrak{A}\subset\mathfrak{X}_0$, то фильтр $\bar{\varphi}=\inf\mathfrak{A}$ имеет базис A, состоящий из всех элементов вида $\inf\limits_{\varphi\in\mathfrak{A}_0}u_\varphi$, где $\mathfrak{A}_0$ — конечное подмножество множества $\mathfrak{A}$, а $u_\varphi\in\varphi$ $(\varphi\in\mathfrak{A}_0)$ (см. 2.7). Множество $B=f[A]$ состоит из элементов вида $\inf\limits_{\varphi\in\mathfrak{A}_0}f(u_\varphi)$, т. е. из элементов вида $\inf\{v_\psi:\psi\in\mathfrak{B}_0\}$, где

$\mathfrak{B}_0=\bar{f}[\mathfrak{A}_0]$ — конечное подмножество множества $\mathfrak{B}=\bar{f}[\mathfrak{A}]$, $v_\psi\in\psi$ $(\psi\in\mathfrak{B}_0)$. Таким образом, B — базис фильтра $\psi=\inf\mathfrak{B}=\inf\bar{f}[\mathfrak{A}]$. Следовательно,

$$\bar{\psi}=\rho[B]=\rho[f[A]]=(f\circ f^{-1}\circ\rho\circ f)[A]\supset(f\circ\sigma)[A]=f[\bar{\varphi}].$$

Вместе с тем $\bar{\psi}=\rho[f[A]]\subset\rho[f[\bar{\varphi}]]=\bar{f}(\bar{\varphi})$.

Проведенные рассуждения приводят к следующему обобщению теоремы 11.

V. *Если X — нижняя решетка, обладающая наименьшим элементом* $\mathbf{0}$ *и хотя бы одной единицей, и f — такое сохраняющее т. н. г. конечных множеств отображение множества X на упорядоченное множество Y, что $f^{-1}[f(\mathbf{0})]=\{\mathbf{0}\}$, то Y также будет нижней решеткой с наименьшим элементом $\bar{\mathbf{0}}=f(\mathbf{0})$, также будет обладать единицей, и если каждое из множеств X и Y удовлетворяют условию (D), то их стоуновские компакты гомеоморфны.*

Для доказательства достаточно заметить, что введенное выше отображение $\bar{f}$ удовлетворяет условию теоремы 11: $\bar{f}^{-1}[Y]=\{\varphi\in\mathfrak{X}_0:\rho[f[\varphi]]=Y\}=\{X\}$, поскольку соотношение $\rho[f[\varphi]]=Y$ влечет включение $\bar{\mathbf{0}}\in f[\varphi]$, т. е. соотношение $\varphi\cap f^{-1}[\bar{\mathbf{0}}]\neq\varnothing$, а последнее означает, что $\mathbf{0}\in\varphi$.

В связи с предложением V укажем на одно применение теоремы 11.

Рассмотрим в качестве X условно полную решетку с наименьшим элементом $\mathbf{0}$, обладающую единичным фильтром E. Предположим, кроме того, что для X удовлетворено условие (D) в усиленной форме: для каждого $x\in X$ множество $D(x)$ правильно (ср. **2.9**). Понимая, как и выше, под δ каноническое отношение дизъюнктности в X, примем за Y совокупность $\mathfrak{K}_\delta(X)$ всех δ-компонент множества X, а за f — каноническое отображение множества X в множество $\mathfrak{K}_\delta(X)$. Согласно предложению II из **2.9** f сохраняет т. н. г. конечных множеств[22], и на основании предложения VIII из **2.10** область значений отображения f совпадает с Y. Ясно также, что $f^{-1}[f(\mathbf{0})]=$

[22] При сделанных относительно X предположениях отображение f сохраняет, кроме того, и т. в. г. произвольных множеств — предложение VI из **2.9**.

$=\{\mathbf{0}\}$. Таким образом, предложение V дает

VI. *При указанных предположениях стоуновские компакты множества X и полной булевской алгебры $\mathfrak{K}_\delta(X)$ гомеоморфны.*

В силу теоремы 8, таким образом, стоуновский компакт множества X экстремально несвязен.

0.2.12. Рассмотрим опять нижнюю решетку X (с порядком σ), обладающую наименьшим элементом $\mathbf{0}$ и единичным фильтром E. Предположим, что дано множество $X_0 \subset X$, содержащее т. н. г. своих непустых конечных подмножеств. Будем считать также, что $\mathbf{0} \in X_0$ и что X_0 обладает единичным фильтром E_0. Порядок в X_0, индуцированный порядком σ, обозначим через σ_0. Под $\mathfrak{X}$ будем подразумевать множество всех фильтров в X, более тонких, чем E, под $\mathfrak{X}_0$ — множество всех фильтров в X_0, более тонких, чем E_0.

Если фильтр $\psi \in \mathfrak{X}_0$ рассматривать как множество в X, то он во всяком случае фильтруется по убыванию, так что является базисом фильтра $\varphi = \sigma[\psi]$ в X. При этом $\sigma[\psi] \cap X_0 = \sigma_0[\psi] = \psi$.

I. *Отображение $\Theta: \psi \longrightarrow \sigma[\psi]$ $(\psi \in \mathfrak{X}_0)$ множества $\mathfrak{X}_0$ в множество $\mathfrak{X}$ взаимно-однозначно и сохраняет т. н. г. непустых множеств.*

Действительно, взаимная однозначность отображения Θ вытекает из сделанного выше замечания: равенство $\sigma[\psi_1] = \sigma[\psi_2]$ $(\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{X}_0)$ влечет $\psi_1 = \sigma[\psi_1] \cap X_0 = \sigma[\psi_2] \cap \cap X_0 = \psi_2$.

Рассмотрим непустое множество $\mathfrak{A}$ фильтров из $\mathfrak{X}_0$. Положим $\psi_0 = \inf \mathfrak{A}$, $\varphi_0 = \inf \Theta[\mathfrak{A}]$. Согласно сказанному в 2.7 фильтр φ_0 имеет базис B, состоящий из элементов вида $\inf\limits_{\psi \in \mathfrak{A}_0} u_\psi$, где $\mathfrak{A}_0$ — конечное непустое подмножество множества $\mathfrak{A}$, а $u_\psi \in \psi$ $(\psi \in \mathfrak{A}_0)$. Но так как $B \subset X_0$, то B будет базисом и фильтра ψ_0, т. е. $\varphi_0 = \sigma[B]$, $\psi_0 = \sigma_0[B]$. Поэтому $\Theta(\psi_0) = \sigma[\psi_0] = \sigma[\sigma_0[B]] = \sigma[B] = \varphi_0$.

Пусть ω — ультрафильтр в X_0. Обозначим через $F_{\sigma[\omega]}$ совокупность всех ультрафильтров в X, более тонких, чем фильтр $\sigma[\omega]$ (см. 2.7). Будем под Q понимать множество всех ультрафильтров в X, а под R — в X_0.

II. *Если $\omega_1, \omega_2 \in R$ и $\omega_1 \neq \omega_2$, то множества $F_{\sigma[\omega_1]}$ и $F_{\sigma[\omega_2]}$ не пересекаются.*

В самом деле, в силу предложения II из 2.5 $F_{\sigma[\omega_1]} \cap \cap F_{\sigma[\omega_2]} = F_{\sigma[\omega_1] \wedge \sigma[\omega_2]}$. Но на основании предложения

I $\sigma[\omega_1]\wedge\sigma[\omega_2]=\sigma[\omega_1\wedge\omega_2]=\sigma[X_0]=X$. Остается заметить, что $F_X=\varnothing$.

Обозначим через Q_0 объединение $\bigcup\limits_{\omega\in R} F_{\sigma(\omega)}$. Элементы множества Q_0 — это все такие ультрафильтры χ в X, что пересечение $\chi\cap X_0$ — ультрафильтр в X_0.

В самом деле, если $\chi\in Q_0$, т. е. если при некотором $\omega\in R$ будет $\chi\in\sigma[\omega]$, то $\chi\cap X_0\supset\sigma[\omega]\cap X_0=\omega$. Отсюда следует, что пересечение $\chi\cap X_0$ непусто и, следовательно, является фильтром в X_0, очевидно, собственным. Но тогда $\chi\cap X_0=\omega$. Обратно, если при некотором $\chi\in Q$ пересечение $\chi\cap X_0=\omega\in R$, то $\chi\supset\sigma[\chi]\supset\sigma[\omega]$, так что $\chi\in Q_0$.

Предположим, что множества X и X_0 удовлетворяют условию (D)[23].

III. *Отображение* $\Phi_0:\chi\to\chi\cap X_0$ $(\chi\in Q_0)$ *подпространства* Q_0 *компакта* Q *на компакт* R *непрерывно.*

Действительно, пусть T — замкнутое множество компакта R и $\psi_0=\sup T$. По теореме 6 соотношения $\omega\in T$ и $\omega\prec\psi_0$ равносильны. Положим $\varphi_0=\Theta(\psi_0)=\sigma[\psi_0]$ и возьмем $\chi\in F_{\varphi_0}\cap Q_0$. Так как $\chi\supset\varphi_0$, то $\chi\cap X_0\supset\varphi_0\cap X_0=\psi_0$, значит, $\Phi_0(\chi)\in T$. Обратно, для $\omega\in T$ будет $\Phi_0^{-1}[\omega]=$ $=F_{\sigma[\omega]}\subset F_{\sigma[\psi_0]}=F_{\varphi_0}$. Таким образом, $\Phi_0^{-1}[T]=F_{\varphi_0}\cap Q_0$. Остается заметить, что в соответствии с теоремой 6 множество F_{φ_0} замкнуто в Q.

В одном важном частном случае отображение Φ_0 допускает распространение (с сохранением непрерывности) на некоторое замкнутое множество пространства Q. Докажем предварительно следующий вспомогательный факт.

Рассмотрим решетку Z, обладающую наименьшим элементом 0_Z и единичным фильтром E. Предположим, что Z удовлетворяет условию (D) и что его стоуновский компакт T — хаусдорфов.

Лемма 1. *Пусть* ψ — *фильтр в* Z, *удовлетворяющий условию: если элементы* u, $v\in Z$ *таковы, что в случае* $u\vee v\in E$ *либо* $u\in\psi$, *либо* $v\in\psi$. *Тогда при* $\psi\prec E$ *существует*

---

[23] Если X — решетка, а X_0 содержит точные границы всех своих непустых конечных подмножеств, то достаточно потребовать только, чтобы условие (D) выполнялось лишь для множества X: если $x\in X_0$, то множество $\{u\in X_0 : u\wedge x=0\}$, будучи пересечением множеств $D(x)$ и X_0, каждое из которых содержит т. в. г. непустых конечных подмножеств, само обладает этим свойством и, стало быть, фильтруется по возрастанию.

единственный ультрафильтр τ в Z, более тонкий чем ψ.

Доказательство. Пусть $\tau_1, \tau_2 \in T$, причем $\tau_1, \tau_2 \prec \psi$. Предполагая $\tau_1 \neq \tau_2$ и учитывая, что пространство T хаусдорфово, найдем непересекающиеся открытые множества G_1 и G_2 так, что $\tau_i \in G_i$ $(i=1, 2)$. Поскольку в силу теоремы 6 дополнения (до T) множеств вида $F_w = \{\tau \in T : w \in \tau\}$ $(w \in Z)$ образуют базис совокупности $\mathfrak{G}(T)$ всех открытых множеств — каждое открытое множество есть объединение некоторой совокупности открытых множеств указанного вида,— то можно считать, что $G_1 = F'_u$, $G_2 = F'_v$, где u и v — элементы из Z. На основании следствия из теоремы 6 $F_{u \vee v} = F_u \cup F_v = G'_1 \cup \cup G'_2 = T$. Отсюда вытекает, что $u \vee v \in E$, так как если $z \wedge (u \vee v) = \mathbf{0}_Z$ $(z \in Z)$, то, снова используя только что цитированный результат, можем написать: $F_z \cap T = \varnothing$, т. е. $F_z = \varnothing$, или, иначе говоря, $z = \mathbf{0}_Z$. По условию в ψ входит один из элементов u или v. Пусть, например, $u \in \psi$. Ввиду того, что $\tau_1 \prec \psi$, будет также $u \in \tau_1$. Но, с другой стороны, так как $\tau_1 \in F'_u$, должно быть $u \overline{\in} \tau_1$. Таким образом, не может быть $\tau_1 \neq \tau_2$.

Замечание. Если в условиях леммы Z — булевская алгебра, то фильтр ψ в Z, удовлетворяющий требованиям леммы,— ультрафильтр. Действительно, если τ — тот ультрафильтр, который тоньше данного фильтра ψ, то согласно предложению IX из **2.7** $\psi \prec \xi$, где фильтр ξ состоит из всех таких $z \in Z$, что множество F_z служит окрестностью (в пространстве T) точки τ. Ввиду теоремы 8 $\xi = \tau$.

Заметим, еще, что само условие леммы, которому должен удовлетворять фильтр ψ, несколько упрощается в рассматриваемом случае. Достаточно требовать, чтобы фильтр ψ обладал таким свойством: каков бы ни был элемент $z \in Z$, либо он сам, либо его дополнение z' входит в ψ. В самом деле, как очевидно, единичный фильтр булевской алгебры Z состоит из единственного — наибольшего — элемента $\mathbf{1}_Z$ этой алгебры. Поэтому если выполнено указанное выше условие и $u \vee v = \mathbf{1}_Z$ $(u, v \in Z)$, то, поскольку $v \geqslant u'$, из предположения $u \overline{\in} \psi$ вытекает, что $u' \in \psi$ и, тем более, $v \in \psi$.

К требованиям, предъявленным к множествам X и X_0 в начале пункта, добавим еще предположение, что X — решетка, а X_0 содержит т. в. г. всех своих конечных подмножеств и, стало быть, также является решеткой (если иметь в виду порядок σ_0). Будем также считать, что для X удовлетворено условие (D). Тогда, как отмечалось, оно будет соблюдено и для множества X_0.

Условимся в обозначениях. Как и выше, если φ — фильтр в X, то под F_φ будем понимать множество $\{\chi\in Q:\chi\prec\varphi\}$. В случае, когда $\varphi=\sigma[x]$ $(x\in X)$, вместо $F_{\sigma[x]}$ будем писать просто F_x (ср. 2.7). Символы W_ψ или W_x (ψ — фильтр в X_0, $x\in X_0$) имеют аналогичный смысл применительно к множеству X_0. Положим еще $Q^0=F_{\sigma[E_0]}$.

Лемма 2. *Если стоуновский компакт R множества X_0 — хаусдорфов, то существует такое непрерывное отображение Φ подпространства Q^0 стоуновского компакта Q множества X на пространство R, что это отображение служит распространением отображения Φ_0, построенного в предложении III. Если при этом X — условно полная решетка и множество X_0 — правильное, то указанное выше отображение Φ будет открытым.*

Доказательство. Возьмем $\chi\in Q^0$ и положим $\psi=\chi\cap X_0$. Поскольку $\chi\prec\sigma[E_0]$, то $\psi\supset\sigma[E_0]\cap X_0=$ так что $\psi\neq\varnothing$. Тем самым множество ψ — фильтр в X_0, очевидно, более тонкий, чем E_0. Проверим, что ψ удовлетворяет условию леммы (при $Z=X_0$). Пусть u и v — такие элементы из X_0, что $u\vee v\in E_0$. Предположим, что ни u, ни v не входят в ψ, а следовательно, и в χ. Тогда, учитывая, что χ — ультрафильтр, можно найти в нем такие элементы x и y, что $x\wedge u=y\wedge v=0$. Понятно, что если положить $z=x\wedge y$, то и подавно $z\wedge u=z\wedge v=0$. Но ввиду условия (D) тогда должно быть $z\wedge(u\vee v)=0$. Между тем $z=x\wedge y\in\chi$ и $u\vee v\in E_0\subset E\subset\chi$. Значит, в силу последнего соотношения и $0\in\chi$, что абсурдно. Таким образом, один из элементов u или v содержится в χ и, стало быть, в ψ. На основании леммы 1 заключаем, что множество W_ψ состоит из единственного элемента.

Отображение Φ зададим, сопоставляя ультрафильтру $\chi\in Q^0$ этот самый единственный элемент множества W_ψ ($\psi=\chi\cap X_0$). Можно, следовательно, написать: $\{\Phi(\chi)\}=W_{\chi\cap X_0}$. Поскольку $Q_0=\bigcup\limits_{\omega\in R}F_{\sigma[\omega]}\subset F_{\sigma[E_0]}=Q^0$ и для $\chi\in Q_0$ пересечение $\chi\cap X_0=\Phi_0(\chi)$ есть ультрафильтр в X_0, то для $\chi\in Q_0$ будет $W_{\chi\cap X_0}=\{\Phi_0(\chi)\}$, так что $\Phi(\chi)=\Phi_0(\chi)$ — отображение Φ является распространением отображения Φ_0. В частности, $R(\Phi)=R$.

Убедимся в непрерывности отображения Φ. Рассмотрим замкнутое множество W компакта R и пусть $\psi = \sup W$. Согласно замечанию 1 к теореме 5 $W = W_\psi$. Положим $\varphi = \sigma[\psi]$. Поскольку на основании предложения III из **2.9** $\psi \prec E_0$, то $\varphi \prec \sigma[E_0]$, так что $F_\varphi \subset Q^0$. Докажем, что

$$\Phi^{-1}[W] = \Phi^{-1}[W_\psi] = F_\varphi. \tag{30}$$

Рассмотрим ультрафильтр $\chi \in F_\varphi$. Так как $\chi \prec \varphi$, то $\Phi(\chi) \prec \chi \cap X_0 \prec \varphi \cap X_0 = \psi$. Следовательно, $\Phi(\chi) \in W$. Возьмем теперь ультрафильтр $\omega \in W$. Учитывая, что $\omega \prec \psi$, получим $\sigma[\omega] \prec \sigma[\psi] = \varphi$. Но для $\chi \in F_{\sigma[\omega]}$ согласно доказанному $\Phi(\chi) = \Phi_0(\chi) = \chi \cap X_0 = \omega$. Остается заметить, что $F_{\sigma[\omega]} \subset F_\varphi$. Поскольку множество F_φ замкнуто, соотношение (30) доказывает непрерывность отображения Φ.

Предположим теперь, что X и X_0 удовлетворяют дополнительным условиям леммы. Как уже отмечалось при доказательстве леммы, дополнения (до Q) множеств вида F_x с $x \in X$ образуют базис совокупности $\mathfrak{G}(Q)$ всех открытых множеств пространства Q. Поэтому для доказательства того, что отображение Φ открыто, достаточно проверить, что для каждого $x \in X$ образ $\Phi[F'_x]$ открыт. Итак, возьмем $x \in X$ и пусть $x_0 = \sup([\mathbf{0}, x] \cap X_0)$. Так как X_0 правильное, то $x_0 \in X_0$. Положим в (30) $W = W_{x_0}$. Это приведет к соотношению $\Phi^{-1}[W_{x_0}] = F_\varphi$, где $\varphi = \sigma[\sup W_{x_0}] \prec \sigma[x_0] \prec \sigma[x]$. Поэтому $\Phi^{-1}[W'_{x_0}] = F'_\varphi \supset F'_x$, так что $\Phi[F'_x] \subset W'_{x_0}$. Если $\omega \in W'_{x_0}$, т. е. если $x_0 \overline{\in} \omega$, то x не может быть элементом фильтра $\sigma[\omega]$. Действительно, предположив, что $x \in \sigma[\omega]$, мы могли бы найти $y \in \omega$ так, чтобы было $y \leqslant x$. Но, поскольку $y \in [\mathbf{0}, x] \cap X_0$, оказалось бы, что $y \leqslant x_0$, а это привело бы к включению $x_0 \in \omega$. Соотношение $x \overline{\in} \sigma[\omega]$ означает, что множество F_x не содержит множества $F_{\sigma[\omega]}$, так что найдется $\chi \in F_{\sigma[\omega]} \setminus F_x$. Ввиду того, что $\chi \prec \sigma[\omega]$, будет $\Phi(\chi) = \Phi_0(\chi) = \chi \cap X_0 = \omega$. Таким образом, с учетом доказанного ранее установлено, что $\Phi[F'_x] = W'_{x_0}$. Этим и завершается доказательство второй части леммы.

З а м е ч а н и е. Если в условиях леммы 2 X_0 — булевская алгебра, то $\Phi = \Phi_0$. В этом случае согласно замечанию к лемме 1 фильтр $\chi \cap X_0$ ($\chi \in Q^0$) будет ультрафильтром в X_0 и, следовательно, χ будет входить в область определения Q_0 отображения Φ_0. Понятно, что предположение леммы 2 о том, что стоуновский компакт R множества X_0 хаусдорфов, излишне — оно выполнено в силу теоремы 7.

Комбинируя результаты леммы 2 и предложения V из **2.11**, приходим к следующему факту.

Теорема 12(2.0). *Пусть X и Y — решетки с порядками σ и ρ, имеющие наименьшие элементы* $\mathbf{0}$ *и* $\bar{\mathbf{0}}$ *и обладающие единичными фильтрами E и G соответственно. Пусть f — такое отображение множества X в множество Y, что оно сохраняет точные границы непустых конечных множеств, $f(0)=\bar{0}$, $f^{-1}[\bar{0}]=\{0\}$. Если стоуновский компакт Q множества X хаусдорфов, то существует непрерывное отображение Ψ замкнутого множества R^0 стоуновского компакта R множества Y на пространство Q. При этом $R^0=\{\omega\in R:\omega\prec\rho[f[E]]\}$.*

Если, кроме того, X — полная решетка, Y — условно полная решетка, а f сохраняет т. в. г. непустых множеств, то отображение Ψ открыто.

Доказательство. Положим $Y_0=f[X]$. Для множеств X и Y_0 (с порядком ρ_0, индуцированным порядком ρ) выполнены, очевидно, условия предложения V из **2.11**. При этом единичный фильтр множества Y_0 совпадает с $f[E]$. Для множества Y_0 удовлетворено условие (D). Поэтому существует гомеоморфизм f^* пространства Q на стоуновский компакт $\bar{Q}$ множества Y_0, который тем самым хаусдорфов. Множества Y и Y_0 удовлетворяют и другим условиям леммы 2, так что существует непрерывное отображение Φ множества $R^0=\{\omega\in R:\omega\prec\rho[f[E]]\}$ на $\bar{Q}$. Достаточно принять $\Psi=f^{*-1}\circ\Phi$.

В условиях второй части теоремы множество Y_0, как очевидно, правильно в Y, так что по второй части леммы 2 отображение Φ, а следовательно, и Ψ открыто.

Замечание 1. Пусть для множеств X, Y и отображения $f:X\to Y$ удовлетворены условия теоремы. Обозначим через $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ совокупности всех фильтров в X и соответственно в Y, более тонких, чем E и соответственно чем G, и положим $\Lambda:\varphi\to\rho[f[\varphi]]$ $(\varphi\in\mathfrak{X})$. Тогда множества $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ и отображение Λ также удовлетворяют условиям теоремы 12. Действительно, отображение f есть суперпозиция $i\circ f_0$, где i — вложение множества Y_0 в множество Y, а f_0 — отображение множества X на множество Y_0 — сужение отображения f. Соответственно этому и отображение Λ представляется в виде суперпозиции $\Lambda_0 \circ \Theta$, где $\Lambda_0 : \varphi \to \rho_0[f_0[\varphi]]$ $(\varphi \in \mathfrak{X})$ — отображение множества $\mathfrak{X}$ в множество $\mathfrak{Y}_0$ всех фильтров в Y_0, более тонких, чем фильтр $G_0 = \rho_0[f[E]]$. Как установлено в связи с доказательством предложения V из **2.11**, отображение Λ_0 сохраняет т. н. г., а на основании предложения I отображение Θ сохраняет т. н. г. непустых множеств, так что и Λ сохраняет т. н. г. непустых множеств. Докажем, что Λ сохраняет т. в. г. конечных непустых множеств. Пусть $\mathfrak{A}$ — конечное непустое множество в $\mathfrak{X}$, $\varphi_0 = \sup \mathfrak{A}$, $\psi_0 = \sup \Lambda[\mathfrak{A}]$. Очевидно, $\psi_0 \prec \Lambda(\varphi_0)$. Возьмем $y \in \psi_0 = \bigcap\limits_{\varphi \in \mathfrak{A}} \rho[f[\varphi]]$ и для каждого $\varphi \in \mathfrak{A}$ найдем такой элемент $x_\varphi \in \varphi$, что $y \in \rho[f(x_\varphi)]$. Положим $x = \sup\limits_{\varphi \in \mathfrak{A}} x_\varphi$. Очевидно, $x \in \varphi$ при любом $\varphi \in \mathfrak{A}$, поэтому $x \in \bigcap\limits_{\varphi \in \mathfrak{A}} \varphi = \varphi_0$. Но

$$y \in \bigcap_{\varphi \in \mathfrak{A}} \rho[f(x_\varphi)] = \rho[\sup f(x_\varphi)] = \rho[f(x)] \subset$$

$$\subset \rho[f[\varphi_0]] = \Lambda(\varphi_0).$$

Этим доказано соотношение $\Lambda(\varphi_0) \prec \psi_0$, т. е. равенство $\Lambda(\varphi_0) = \psi_0$.

Замечание 2. Единичный фильтр множества $\mathfrak{X}$ состоит из единственного элемента — фильтра E. В самом деле, пусть φ — единица множества $\mathfrak{X}$. Пусть $x \in \varphi$ и x_0 — такой элемент из X, что $x \wedge x_0 = \mathbf{0}$. Полагая $\psi = \sigma[x_0]$, будем иметь $\varphi \wedge \psi = \sigma[\mathbf{0}] = X$, так что ввиду того, что φ — единица, $\sigma[x_0] = X$, т. е. $x_0 = \mathbf{0}$. Стало быть, x — единица множества X. Иными словами, $\varphi \succ E$. Учитывая, что $\varphi \in \mathfrak{X}$, получаем отсюда $\varphi = E$.

Аналогичное замечание справедливо, разумеется, и по отношению к единичному фильтру множества $\mathfrak{Y}$.

Замечание 3. Применяя теорему 12 к множествам $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ и отображению Λ, введенным в замечании 1, получим, что существует непрерывное отображение Ψ множества $\mathfrak{R}^0$ стоуновского компакта $\mathfrak{R}$ множества $\mathfrak{Y}$ на стоуновский компакт $\mathfrak{Q}$ множества $\mathfrak{X}$. При этом $\mathfrak{R}^0 = \{\bar{\omega} \in \mathfrak{R} : \Lambda(E) \in \bar{\omega}\}$. Согласно предложению IV из **2.11** компакты $\mathfrak{R}$ и R', равно как и компакты $\mathfrak{Q}$ и Q, гомеоморфны, так что, «перенося» с помощью указанных гомеоморфизмов отображение Ψ на компакты R и Q, получаем другой вариант теоремы 12. Важно при этом отметить, что множества $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ в отличие от данных множеств X и Y суть полные решетки.

Замечание 4. Если в условиях замечания 1 X — полная решетка, а f сохраняет т. в. г. непустых множеств, то и отображение Λ сохраняет т. в. г. непустых множеств. В этом можно убедиться совершенно также, как и в случае замечания 1. Несколько уточняя рассуждения, можно было бы заменить при этом требование полноты решетки X предположением об ее условной полноте, поскольку элементы x_φ всегда можно выбрать так, чтобы было $x_\varphi \leqslant e$, где e — какая-либо единица множества X. В этих предположениях множества $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ и отображение Λ удовлетворяют условиям второй части теоремы 12, что позволяет в формулировке этой части теоремы снять требование (условной) полноты множества Y.

Пусть X и X_0 — множества, удовлетворяющие всем условиям леммы 2. Обозначим через δ_0 каноническое отношение дизъюнктности в множестве X_0, через φ — каноническое отображение множества X в булевскую алгебру $\mathfrak{K}_\delta(X)$, через E_0 — единичный фильтр множества X_0. Основываясь на предложении VI из **2.11**, докажем следующий факт.

IV. *Если множество X_0 — условно полная решетка, удовлетворяющая условию (D) в усиленной форме: для любого $x \in X_0$ множество $D(x) = \{y \in X_0\colon\ y \wedge x = 0\}$ правильно в X_0, то существует непрерывное отображение замкнутого множества Q^0 стоуновского компакта Q булевской алгебры $\mathfrak{K}_\delta(X)$ на стоуновский компакт R булевской алгебры $\mathfrak{K}_{\delta_0}(X_0)$. При этом $Q_0 = \{\chi \in Q : \chi \supset \varphi[E_0]\}$.*

Действительно, обозначим через φ_0 сужение отображения φ на множество X_0. Множества X_0, $\mathfrak{K}_\delta(X)$ и отображение φ_0 удовлетворяют условиям теоремы 12 (предложения II и V из **2.9**). Поэтому существует непрерывное отображение множества Q^0 на стоуновский компакт множества X_0, который в силу предложения VI из **2.11** гомеоморфен пространству R.

Если условие (D) соблюдено и для множества X в усиленной форме и множество X_0 правильно в X, то в силу предложения VI из **2.9** будут удовлетворены условия второй части теоремы 12, так что указанное в предложении IV отображение можно считать открытым.

0.2.13. В заключение укажем еще на одно применение теоремы 12.

Рассмотрим множество X и отношение дизъюнктности δ в нем (см. **1.9**). В множестве $X_0 \subset X$ введем соответствие $\delta_0 = \delta \cap X_0^2$. В общем случае о соответствии δ_0 можно сказать не слишком много: ну, например, что оно, как и δ, симметрично. Чтобы сформулировать некоторые другие свойства соответствия δ_0, условимся, что ниже мы будем использовать обозначения и терминологию из **1.9** в частности, поляру $\pi_\delta(A)$ множества $A \subset X$ будем обозначать символом A^d, а множество A^{dd} — наименьшую δ-компоненту, содержащую A, — символом $\widetilde{A}$. Если $A \subset X_0$, то под A^{d_0} будем понимать поляру $\pi_{\delta_0}(A)$. Очевидно, $A^{d_0} = A^d \cap X_0$.

I. *Отображение* $\Theta: K \longrightarrow \widetilde{K} (K \in \mathfrak{K}_{\delta_0}(X_0))$ *множества* $\mathfrak{K}_{\delta_0}(X)$ *всех* δ_0-*компонент в множество* $\mathfrak{K}_\delta(X)$ *всех* δ-*компонент является изоморфизмом. При этом* $\Theta^{-1}: H \to H \cap X_0$ $(H \in \Theta[\mathfrak{K}_{\delta_0}(X_0)])$.

Для доказательства достаточно установить, что

$$K = \widetilde{K} \cap X_0 \quad (K \in \mathfrak{K}_{\delta_0}(X_0)). \tag{31}$$

Так как K — δ_0-компонента, то $K = K^{d_0 d_0} = K^{d_0 d} \cap X_0$. Но $K^{d_0} = K^d \cap X_0 \subset K^d$. Поэтому $K^{d_0 d} \cap X_0 \supset K^{dd} \cap X_0 = \widetilde{K} \cap X_0$, так что $K \supset \widetilde{K} \cap X_0 \supset K$.

Обозначим через Z и соответственно через Z_0 наименьшую δ- и соответственно δ_0-компоненту. Докажем, что соответствие δ_0 удовлетворяет второму условию определения отношения дизъюнктности (см. **1.9**) Пусть x — такой элемент из X_0, что $(x, x) \in \delta_0$. Так как $(x, x) \in \delta$, а δ — отношение дизъюнктности, то $x \in Z$. Следовательно, в силу (31) $x \in Z \cap X_0 \subset \widetilde{Z}_0 \cap X_0 = Z_0$ [24].

Отметим, что из установленного факта вытекают соотношения (см. теорему 2)

$$K \wedge K^{d_0} = Z_0, \quad K \vee K^{d_0} = X_0 \quad (K \in \mathfrak{K}_{\delta_0}(X))\ ^{25}. \tag{32}$$

---

[24] Заметим, что на самом деле имеет место равенство $Z \cap X_0 = Z_0$, так как если $x \in Z_0$, то $(x, x) \in \delta_0 \subset \delta$ и, значит, $x \in Z$.

[25] Здесь имеются в виду точные границы в решетке $\mathfrak{K}_{\delta_0}(X_0)$.

Действительно, при выводе этих равенств в **1.9** использовались лишь первые два условия из определения отношения дизъюнктности.

Наложим теперь на множество X_0 дополнительное требование, которое сохраним до конца настоящего пункта. Именно будем считать, что след $H \cap X_0$ на X_0 любой δ-компоненты H вида $H = \tilde{A}$, где A — какое-либо множество из X_0, является δ_0-компонентой.

Укажем сразу же на один хотя и частный, но достаточно важный случай соблюдения введенного условия.

Пусть X — нижняя решетка с наименьшим элементом $\mathbf{0}$ и δ — каноническое отношение дизъюнктности в X (см. **2.8**). О множестве X_0 будем предполагать, что оно является *супремальным генератором* по отношению к X, т. е. что для каждого $z \in X$ имеет место тождество $z = \sup([\mathbf{0}, z] \cap X_0)$.

II. *Если в указанных условиях для упорядоченного множества X соблюден дистрибутивный закон, то, какова бы ни была δ-компонента H, пересечение $K = H \cap X_0$ является δ_0-компонентой, причем $\Theta(K) = \tilde{K} = H$.*

Для доказательства убедимся в справедливости равенства

$$H = (H^d \cap X_0)^d. \tag{33}$$

Действительно, пусть $x \in (H^d \cap X_0)^d$ и $z \in H^d$. По условию $z = \sup A_z$, где через A_z обозначено пересечение $[\mathbf{0}, z] \cap X_0$. Следовательно, ввиду дистрибутивности $x \wedge \wedge z = \sup_{y \in A_z}(x \wedge y)$. Но, очевидно, $A_z \subset H^d \cap X_0$, так что, поскольку в связи с этим $x \in (A_z)^d$, будет $x \wedge z = \mathbf{0}$, т. е. $x \in H^{dd} = H$. Этим доказано включение $(H^d \cap X_0)^d \subset H$. Обратное включение имеет место и без каких-либо специальных предположений о X и X_0.

На основании (33) получаем $H \cap X_0 = (H^d \cap X_0)^d \cap \cap X_0 = (H^d \cap X_0)^{d_0}$, откуда и вытекает, что $K = H \cap X_0 \in \in \mathfrak{K}_{\delta_0}(X_0)$.

Переходя в равенстве (33) к дизъюнктным дополнениям, можем написать: $H^d = (H^d \cap X_0)^{dd} = (\widetilde{H^d \cap X_0})$ или, заменяя в этом соотношении δ-компоненту H на δ-компоненту H^d,— $H = (\widetilde{H \cap X_0}) = \tilde{K} = \Theta(K)$.

С учетом предложения I результат предложения II приводит к следующему факту.

III. *В условиях предложения* II *отображение* $\Theta: K \to \widetilde{K} (K \in \mathfrak{K}_{\delta_0}(X))$ *является изоморфизмом упорядоченного множества* $\mathfrak{K}_{\delta_0}(X_0)$ *на булевскую алгебру* $\mathfrak{K}_\delta(X)$ *и, стало быть,* $\mathfrak{K}_{\delta_0}(X_0)$ *оказывается полной булевской алгеброй.*

В самом деле, из предложения II следует, что отображение $\Psi: H \to H \cap X_0$ $(H \in \mathfrak{K}_\delta(X))$ обратно к Θ.

Заметим, что требование дистрибутивности упорядоченного множества X в условиях предложения II очевидным образом может быть ослаблено. Соответствующие формулировки мы предоставляем читателю.

Возвращаясь к общему случаю, докажем, что введенное выше предположение о X и X_0 обеспечивает справедливость следующего предложения.

IV. *Каково бы ни было множество* $A \subset X_0$, *имеет место соотношение* $\widetilde{A^{d_0 d_0}} = \widetilde{A}$.

Убедимся сначала, что $A^{d_0 d_0} = \widetilde{A} \cap X_0$. Как и при проверке соотношения (31), имеем $A^{d_0 d_0} = A^{d_0 d} \cap X_0 \supset A^{dd} \cap \cap X_0 = \widetilde{A} \cap X_0$. Но по условию пересечение $\widetilde{A} \cap X_0$ является δ_0-компонентой, содержащей, очевидно, множество A. Поэтому $\widetilde{A} \cap X_0 \supset A^{d_0 d_0}$, что равносильно доказываемому равенству. Используя его, можем написать: $\widetilde{A^{d_0 d_0}} \subset \widetilde{A}$. И так как $A^{d_0 d_0} \supset A$, то $\widetilde{A^{d_0 d_0}} = \widetilde{A}$.

Используя предложение IV, нетрудно обосновать возможность применения теоремы 12. Обозначим $\overline{H} = \Theta(X_0) = \widetilde{X}_0$.

V. *Отображение* Θ *сохраняет точные границы непустых множеств. Кроме того,*

$$\Theta\left(K^{d_0}\right) = \overline{H} \cap [\Theta(K)]^d = \overline{H} \cap \left(\widetilde{K}\right)^d = \\ = \overline{H} \cap K^d \ (K \in \mathfrak{K}_{\delta_0}(X)). \tag{34}$$

Действительно, пусть $\mathfrak{A}$ — непустое множество в $\mathfrak{K}_{\delta_0}(X_0)$. Положим $K_0 = \sup \mathfrak{A}$, $H_0 = \sup \Theta[\mathfrak{A}]$. Если принять в предложении IV $A = \bigcup\limits_{K \in \mathfrak{A}} K$, то, учитывая, что $K_0 = A^{d_0 d_0}$, будем иметь

$$\Theta(K_0) = \widetilde{K}_0 = \widetilde{A} \subset \widetilde{\bigcup_{K \in \mathfrak{A}} \Theta(K)} = \sup \Theta[\mathfrak{A}] = H_0.$$

Обратное включение очевидно.

Прежде чем доказывать равенство $\Theta(\inf \mathfrak{A}) = \inf \Theta[\mathfrak{A}]$, убедимся в справедливости соотношений (34). Пусть $K \in \mathfrak{K}_{\delta_0}(X_0)$. Поскольку по доказанному Θ сохраняет точные верхние границы непустых множеств, на основании (32) $\widetilde{K^{d_0}} \vee \widetilde{K} = \widetilde{X_0} = \overline{H}$. А так как $K^{d_0} \subset$ $\subset K^d$, то $\widetilde{K^{d_0}} \subset K^d = (\widetilde{K})^d$, вследствие чего $\widetilde{K^{d_0}} \wedge \widetilde{K} = Z$. Принимая во внимание, что решетка $\mathfrak{K}_\delta(X)$ является булевской алгеброй, получаем отсюда требуемое равенство.

Для завершения доказательства предложения воспользуемся соотношениями (21) из 1.5. В силу указанных соотношений $\inf \mathfrak{A} = (\sup_{K \in \mathfrak{A}} K^{d_0})^{d_0}$. Поскольку $\inf \Theta[\mathfrak{A}] \subset \Theta(X_0) = \overline{H}$, то

$$\Theta(\inf \mathfrak{A}) = \overline{H} \cap [\Theta(\sup_{K \in \mathfrak{A}} K^{d_0})]^d =$$
$$= \overline{H} \cap [\sup_{K \in \mathfrak{A}} \Theta(K^{d_0})]^d = \overline{H} \cap [\sup_{K \in \mathfrak{A}} (\Theta(K))^d]^d =$$
$$= \overline{H} \cap \inf \Theta[\mathfrak{A}] = \inf \Theta[\mathfrak{A}].$$

VI. *Соответствие δ_0 является отношением дизъюнктности в множестве X_0.*

Действительно, пусть x, y — такие элементы из X_0, что $\{x\}^{d_0 d_0} \cap \{y\}^{d_0 d_0} = Z_0$. Так как $Z_0 = Z \cap X_0$, то $\Theta(Z_0) =$ $= \widetilde{Z}_0 \subset Z$.

Следовательно, поскольку δ-компонента Z — наименьшая, $\Theta(Z_0) = Z$. Тем самым на основании предложений IV и V $\widetilde{\{x\}} \cap \widetilde{\{y\}} = \widetilde{\{x\}^{d_0 d_0}} \cap \widetilde{\{y\}^{d_0 d_0}} = \widetilde{Z}_0 = Z$. Тем самым $(x, y) \in \delta$, а стало быть, и $(x, y) \in \delta_0$. Таким образом, соответствие δ_0 удовлетворяет всем условиям определения отношения дизъюнктности.

Обозначая $\mathfrak{K}_0 = \Theta[\mathfrak{K}_{\delta_0}(X_0)]$, в силу предложений I и V заключаем, что $\mathfrak{K}_0$ является правильной подалгеброй полной булевской алгебры $\mathfrak{K}_\delta(X)$. Наименьшим элементом множества $\mathfrak{K}_0$ служит δ-компонента $Z = \Theta(Z_0)$, наибольшим — δ-компонента $\overline{H} = \Theta(X_0)$.

Применяя к полным булевским алгебрам $\mathfrak{K}_{\delta_0}(X_0)$ и $\mathfrak{K}_\delta(X)$ вторую часть теоремы 12, получим следующую зависимость между стоуновскими компактами Q алгебры $\mathfrak{K}_{\delta_0}(X_0)$ и R алгебры $\mathfrak{K}_\delta(X)$.

Теорема 13(2.0). *Существует непрерывное открытое отображение* Φ *открыто-замкнутого множества* $R^0 =$ $= \{\omega \in R : \overline{H} \in \omega\}$ *на компакт* Q.

Для доказательства достаточно заметить, что единичный фильтр булевской алгебры состоит из единственного — наибольшего — элемента этой алгебры и что в силу теоремы 7 множество R^0 открыто-замкнуто.

Замечание. Согласно теореме 7 булевские алгебры $\mathfrak{K}_{\delta_0}(X_0)$ и $\mathfrak{K}_\delta(X)$ изоморфны булевским алгебрам всех открыто-замкнутых множеств своих стоуновских компактов Q и R соответственно. Отождествляя каноническим образом указанные изоморфные алгебры и используя результаты 2.12, в частности замечание 2 к лемме 2 указанного пункта, видим, что отображения Θ и Φ связаны соотношением $\Theta(K)=\Phi^{-1}[K]\,(K\in\mathfrak{K}_{\delta_0}(X_0))$

Если в предыдущих рассмотрениях под X понимать полную булевскую алгебру с наименьшим элементом $\mathbf{0}$, а под X_0 — правильное множество в X, содержащее элемент $\mathbf{0}$ и точные нижние границы всех своих непустых конечных подмножеств, то нетрудно убедиться, что для X и X_0 соблюдено условие текущего пункта. Действительно, множество X_0 вместе с индуцированным из X порядком будет, очевидно, полной булевской алгеброй. Поэтому если H — какая-либо δ-компонента, а $x_0=$ $=\sup(H\cap X_0)$, то пересечение $H\cap X_0$ совпадает с $[\mathbf{0},x_0]\cap$ $\cap X_0$ и в силу замечания 2 к теореме 9 $H\cap X_0$ является δ-компонентой. Учитывая результат указанного замечания к теореме 7, можем утверждать, таким образом, справедливость следующего факта.

Следствие. *Если X — полная булевская алгебра, а X_0 — ее правильная подалгебра, то существует непрерывное открытое отображение открыто-замкнутого множества R^0 стоуновского компакта R алгебры X на стоуновский компакт Q алгебры X_0. При этом $R^0=\{\omega\in R:$ $: x_0\in\omega\}$, где x_0 — наибольший элемент подалгебры X_0.*

Глава I

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ УПОРЯДОЧЕННЫХ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Наличие в упорядоченном множестве структуры векторного пространства, согласованной с отношением порядка, открывает возможности значительного продвижения как в теории упорядоченных множеств, так и в теории векторных пространств. Если при этом отношение порядка обладает хорошей квалификацией, то в ряде важных случаев удается дать исчерпывающее описание рассматриваемых объектов.

§ 1. УПОРЯДОЧЕННЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

В этом параграфе даются основные определения и приводятся простейшие свойства произвольных упорядоченных векторных пространств.

I. 1.1. Прежде всего, не входя в подробности, эскизно, напомним основные факты, связанные с понятием векторного пространства.

Рассмотрим коммутативную группу X. Закон композиции в ней будем называть *сложением* и соответственно этому нейтральный элемент группы X — нулевым (его будем обычно обозначать символом $\mathbf{0}$). Результат сложения элементов $x, y \in X$ называется *суммой* элементов x и y и обозначается $x+y$. Элемент, обратный по отношению к данному элементу $x \in X$, записывается как $-x$. Вместо суммы $y+(-x)$ $(x, y \in X)$ принято писать просто $y-x$, называя этот элемент *разностью* элементов y и x. Если Ξ — конечное множество и $\{x_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ — семейство элементов группы X, то по индукции определяется сумма $\sum_{\xi\in\Xi} x_\xi$ этого семейства так, что удовлетворен ассоциативный закон: если конечное семейство $\{\Xi_\lambda\}$ $(\lambda\in\Lambda)$ подмножеств множества Ξ таково, что $\Xi = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \Xi_\lambda$ и при различных λ_1, $\lambda_2\in\Lambda$ множества Ξ_{λ_1} и Ξ_{λ_2} не пересекаются, то

$$\sum_{\xi\in\Xi} x_\xi = \sum_{\lambda\in\Lambda}\left(\sum_{\xi\in\Xi_\lambda} x_\xi\right).$$

Отсюда, очевидно, следует, что сумма пустого семейства элементов X равна нулевому элементу группы X.

Гомоморфизм группы X в себя называется эндоморфизмом. Множество всех эндоморфизмов группы X обозначим через $\mathfrak{E}(X)$. Как известно, множество $\mathfrak{E}(X)$ вместе с операциями *сложения:* $(\varphi_1, \varphi_2)\to\varphi_1+\varphi_2$ $(\varphi_1, \varphi_2\in\mathfrak{E}(X))$, где $\varphi_1+\varphi_2: x\to\varphi_1(x)+\varphi_2(x)$ $(x\in X)$, и *умножения:* $(\varphi_1, \varphi_2)\to\varphi_1\varphi_2=\varphi_1\circ\varphi_2$ оказывается кольцом. Нулем этого кольца служит нулевой эндоморфизм: $x\to\mathbf{0}$ $(x\in X)$. Если группа X не сводится к единственному — нулевому — элементу, то кольцо $\mathfrak{E}(X)$ обладает единицей, роль которой играет тождественное отображение I_X множества X на себя.

Пусть, кроме группы X, имеется еще поле R и такое гомоморфное отображение p этого поля в кольцо $\mathfrak{E}(X)$, что $p(1)=I_X$ (через 1 обозначена единица поля R)[1]. Группа X вместе с отображением p, называется *векторным пространством* (над полем R). При этом элементы поля R называются *скалярами*, а само R — *полем скаляров,* отображение p — определяющим структуру векторного пространства *вложением* поля скаляров в кольцо эндоморфизмов $\mathfrak{E}(X)$. Отображение $\delta: (\alpha, x)\to \to\alpha x=p(\alpha)(x)$ $((\alpha, x)\in R\times X)$ называется операцией *умножения на скаляр.* Это отображение можно рассматривать как (внешний) закон композиции, который наряду с групповой операцией определяет в X структуру векторного пространства.

Очевидно, соблюдены условия:

(1) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$ $(\alpha\in R;\ x, y\in X)$;

---

[1] Если X содержит более одного элемента, то, как нетрудно показать, p является изоморфизмом поля R в кольцо $\mathfrak{E}(X)$.

(2) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$ $(\alpha, \beta\in R;\ x\in X)$;

(3) $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$ $(\alpha, \beta\in R;\ x\in X)$;

(4) $1x=x$ $\qquad (x\in X)$.

Если к этим условиям присоединить требования, которым подчинена групповая операция в X, то получится система аксиом, с помощью которой обычно описывают структуру векторного пространства.

Всюду в дальнейшем в книге под векторным пространством понимается *вещественное* векторное пространство — когда в качестве поля скаляров фигурирует поле $\mathbf{R}$ всех вещественных чисел. Немногочисленные отступления от этого соглашения будут тщательно оговариваться.

В теории упорядоченных векторных пространств большую и, можно даже сказать, определяющую роль (см. **1.2**) играет понятие конуса.

Напомним, что непустое множество K в векторном пространстве X называется *конусом*, если для любых $\alpha, \beta\in\mathbf{R}^+$ (через $\mathbf{R}^+$ обозначено множество всех положительных вещественных чисел)[2] $\alpha K+\beta K\subset K$. Ясно, что любой конус содержит нулевой элемент пространства.

I. *Линейная оболочка $\mathscr{L}(K)$ конуса K, т. е. наименьшее из линейных множеств, содержащих K, совпадает с множеством $K-K$.*

Действительно, если $\alpha, \beta\in\mathbf{R}$, то

$$\alpha(K-K)+\beta(K-K)\subset(|\alpha|K+|\beta|K)-$$
$$-(|\alpha|K+|\beta|K)\subset K-K,$$

так что множество $K-K$ линейное. При этом $K-K\supset K-\mathbf{0}=K$. Если X_0 — линейное множество, содержащее K, то $K-K\subset X_0-X_0=X_0$.

Конус K в векторном пространстве X называется *воспроизводящим*, если $\mathscr{L}(K)=X$, т. е. с учетом предложения I если каждый элемент пространства X допу-

---

[2] Если E и F — множества в векторном пространстве X, то под $E+F$ понимается множество всех элементов вида $x+y$ с $x\in E$, $y\in F$, т. е. образ $\varphi[E\times F]$, где φ — групповая операция в X. Аналогичный смысл приписывается символам $E-F$, $x\pm E$ $(x\in X)$, αE $(\alpha\in\mathbf{R})$ и т. п.

скает представление в виде разности элементов из конуса K.

Поскольку векторное пространство достаточно просто восстанавливается по воспроизводящему конусу, естественно ожидать, что те или иные понятия, связанные с векторным пространством, если их «редуцировать» на конус, могут быть легко восстановлены в своем первоначальном виде. Мы остановимся лишь на одном примере такого рода.

Отображение A конуса K векторного пространства X в векторное пространство Y называется *предлинейным оператором*, если

$$A(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha A(x_1)+\beta A(x_2) \quad (\alpha,\ \beta\in\mathbf{R}^+;\ x_1,\ x_2\in K). \quad (1)$$

II. *Пусть A — предлинейный оператор, отображающий воспроизводящий конус K векторного пространства X в векторное пространство Y. Существует единственный линейный оператор $\bar{A}$, отображающий пространство X в пространство Y и являющийся распространением оператора A.*

Действительно, будем смотреть на A как на соответствие из X в Y, т. е. как на множество в произведении $X\times Y$, состоящее из всех пар вида $(x,\ A(x))$ с $x\in K$. Если множество $X\times Y$ снабдить канонической структурой векторного пространства (с покоординатными алгебраическими операциями), то множество A, как очевидно, будет конусом в этом пространстве. В качестве $\bar{A}$ возьмем линейную оболочку (в пространстве $X\times Y$) множества A. Проверим, что соответствие $\bar{A}$ однозначно. Пусть при некотором $x\in X$ пары $(x,\ y_1)$, $(x,\ y_2)\in\bar{A}$. Согласно предложению I найдутся такие элементы $x_i\in K$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$, что

$$(x,\ y_1)=(x_1,\ A(x_1))-(x_2,\ A(x_2));$$

$$(x,\ y_2)=(x_3,\ A(x_3))-(x_4,\ A(x_4)).$$

Поскольку $x=x_1-x_2=x_3-x_4$, то $x_1+x_4=x_2+x_3$ и в силу (1) $A(x_1)+A(x_4)=A(x_2)+A(x_3)$, так что $y_1=$ $=A(x_1)-A(x_2)=A(x_3)-A(x_4)=y_2$. Так как конус K — воспроизводящий, то на основании предложения I произвольный элемент $x\in X$ можно представить в виде $x=$

$=u-v$, где u, $v \in K$. Следовательно, пара $(x, A(u)-A(v)) \in \bar{A}$. Таким образом, область определения отображения $\bar{A}$ совпадает с X. Линейность отображения $\bar{A}$ равносильна линейности (в пространстве $X \times Y$) множества $\bar{A}$. Единственность оператора $\bar{A}$ очевидна.

Ввиду важности понятия воспроизводящего конуса целесообразно дать абстрактное описание структуры, которая наводится структурой векторного пространства на воспроизводящем конусе.

Рассмотрим полугруппу M, обладающую нейтральным элементом $\mathbf{0}$ (этот элемент мы будем называть *нулевым*, а закон композиции в M — *сложением*). Обозначим через $\mathfrak{E}_0(M)$ совокупность всех таких эндоморфизмов φ полугруппы M, что $\varphi(\mathbf{0})=\mathbf{0}$. Нетрудно понять, что множество $\mathfrak{E}_0(M)$ вместе с операциями *сложения*: $(\varphi_1, \varphi_2) \to \varphi_1+\varphi_2$ и *умножения*: $(\varphi_1, \varphi_2) \to \varphi_1\varphi_2=\varphi_1 \circ \varphi_2$ оказывается полукольцом. Допустим, что существует такой гомоморфизм π полуполя $\mathbf{R}^+$ в полукольцо $\mathfrak{E}_0(M)$, что $\pi(0)$ есть нулевой эндоморфизм, а $\pi(1)$ совпадает с тождественным эндоморфизмом I_M.

Множество M вместе с законом композиции полугруппы и отображением π называется *коническим пространством*. Если при этом M — полугруппа с сокращением[3], то говорят о *векторном предпространстве*.

Для конического пространства используется те же терминология и обозначения, что и для векторного пространства. В частности, числа из $\mathbf{R}^+$ называются *скалярами*, а элемент $\alpha\xi=\pi(\alpha)(\xi)$ — *произведением* скаляра $\alpha \in \mathbf{R}^+$ *на элемент* $\xi \in M$.

III. *Если операция сложения σ в коническом пространстве M такова, что полугруппа (M, σ) является группой, то гомоморфизм π, определяющий структуру конического пространства, может быть единственным образом распространен до гомоморфизма поля $\mathbf{R}$ в кольцо $\mathfrak{E}(M)$ всех эндоморфизмов группы M.*

В самом деле, положим $p(\alpha)=\operatorname{sgn}\alpha\pi(|\alpha|)$ $(\alpha \in \mathbf{R})$. Тогда, если знаки чисел α_1, α_2 одинаковы,

$$p(\alpha_1+\alpha_2)=\operatorname{sgn}(\alpha_1+\alpha_2)\pi(|\alpha_1+\alpha_2|)=$$
$$=\operatorname{sgn}(\alpha_1+\alpha_2)\pi(|\alpha_1|+|\alpha_2|)=$$
$$=\operatorname{sgn}\alpha_1\pi(|\alpha_1|)+\operatorname{sgn}\alpha_2\pi(|\alpha_2|)=p(\alpha_1)+p(\alpha_2).$$

[3] Это означает, что равенства $\xi+\zeta=\eta+\zeta$ $(\xi, \eta, \zeta \in M)$ и $\xi=\eta$ равносильны.

Если же знаки у α_1 и α_2 различны и, например, $\alpha_1 \geqslant 0$, $\alpha_2 \leqslant 0$ и $\alpha_1+\alpha_2 \geqslant 0$, то

$$p(\alpha_1+\alpha_2) = \pi(\alpha_1+\alpha_2) = \pi(\alpha_1+\alpha_2)+\pi(-\alpha_2)-\pi(-\alpha_2) = \\ = \pi(\alpha_1)-\pi(-\alpha_2) = p(\alpha_1)+p(\alpha_2).$$

Остальные варианты распределения знаков у чисел α_1, α_2 и $\alpha_1+\alpha_2$ исчерпываются с помощью аналогичных рассмотрений, так что $p(\alpha_1+\alpha_2) = p(\alpha_1)+p(\alpha_2)$ при любых $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}$.

Так как $\mathfrak{S}(M)$ — кольцо, то

$$p(\alpha_1\alpha_2) = \operatorname{sgn}(\alpha_1\alpha_2)\pi(|\alpha_1||\alpha_2|) = \\ = (\operatorname{sgn}\alpha_1\pi(|\alpha_1|))(\operatorname{sgn}\alpha_2\pi(|\alpha_2|)) = p(\alpha_1)p(\alpha_2).$$

Единственность гомоморфизма p не нуждается в доказательстве.

Полученный результат можно истолковать следующим образом: если коническое пространство M удовлетворяет условиям доказанного предложения, то в M можно ввести структуру векторного пространства так, что операция умножения на скаляр в этом пространстве будет распространением (с $\mathbf{R}^+\times M$ на $\mathbf{R}\times M$) соответствующей операции в коническом пространстве.

Заметим еще, что в условиях предложения III коническое пространство M будет, разумеется, векторным предпространством.

В соответствии с общими принципами *подпространством* конического пространства M называется такое множество $M_0 \subset M$, на котором индуцированные из M алгебраические операции определяют структуру конического пространства. Как легко понять, это будет в том и только в том случае, когда $\alpha M_0+\beta M_0 \subset M_0$ для любых $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^+$.

Если имеется семейство $\{M_t\}$ $(t \in T)$ конических пространств, то в произведении $M = \prod\limits_{t\in T} M_t$ может быть определена структура конического пространства: сложение и умножение на скаляр определяются покоординатно. Отметим, что если при каждом $t \in T$ коническое пространство M_t является векторным предпространством, то таким же будет и произведение M.

Если M и N — конические пространства, то отображение A множества M в множество N, сохраняющее структуру конического пространства, называется *предлинейным*. Это означает, что

$$A(\alpha\xi_1+\beta\xi_2)=\alpha A(\xi_1)+\beta A(\xi_2) \quad (\alpha,\ \beta\in\mathbf{R}^+,\ \xi_1,\ \xi_2\in M).$$

Взаимно-однозначное предлинейное отображение конического пространства M на коническое пространство N называется *изоморфизмом* указанных пространств, а сами пространства M и N в случае существования такого отображения — изоморфными.

Рассмотрим коническое пространство M и отношение эквивалентности ω в нем[4]. Будем говорить, что ω *согласовано* со структурой конического пространства в M, если ω является подпространством конического пространства M^2, т. е. если соотношения $\xi_1\sim\eta_1$, $\xi_2\sim\eta_2$ (ξ_1, ξ_2, η_1, $\eta_2\in M$) влекут эквивалентность $\alpha\xi_1+\beta\xi_2\sim$ $\sim\alpha\eta_1+\beta\eta_2$, каковы бы ни были α, $\beta\in\mathbf{R}^+$.

Если ω удовлетворяет указанному условию, то в фактор-множестве M/ω естественным образом возникает структура конического пространства. Сумму $x+y$ (x, $y\in M/\omega$) определяем как тот класс эквивалентности, который содержит элемент $\xi+\eta$, где $\xi\in x$, $\eta\in y$ (в силу условия согласования класс $x+y$ не зависит от выбора представителей классов x и y). Аналогично произведение αx ($\alpha\in\mathbf{R}^+$, $x\in M/\omega$) — это класс эквивалентности, содержащий элемент $\alpha\xi$, где $\xi\in x$. Предоставляем читателю проверку того, что при таком определении алгебраических операций в M/ω действительно возникает структура конического пространства (соответствующее коническое пространство называется *фактор-пространством* данного конического пространства M по отношению эквивалентности ω). Отметим, что роль нулевого элемента в фактор-пространстве M/ω будет играть класс эквивалентности, содержащий нулевой элемент.

Примером конического пространства и, более того, векторного предпространства может служить конус в

---

[4] Соответствие ω из M в M называется *отношением эквивалентности*, если оно: (а) симметрично ($\omega^{-1}=\omega$); (б) рефлексивно ($\omega\supset$ $\supset I_M$); (в) транзитивно ($\omega\circ\omega\subset\omega$). Обычно элементы ξ, $\eta\in M$ такие, что $(\xi,\ \eta)\in\omega$, называют *эквивалентными* и пишут при этом $\xi\sim\eta$.

векторном пространстве X, если его снабдить алгебраическими операциями, индуцированными из X. Этот пример универсален, как показывает следующая теорема.

Теорема 1(1.1). *Пусть M — векторное предпространство. Существует векторное пространство X такое, что M изоморфно воспроизводящему конусу K пространства X.*

Доказательство. В множестве M^2 введем соответствие

$$\omega=\{((\xi_1,\xi_2),\ (\eta_1,\ \eta_2))\in(M^2)^2:\xi_1+\eta_2=\xi_2+\eta_1\}.$$

Докажем, что ω — отношение эквивалентности. Очевидно, нуждается в проверке только транзитивность ω. Пусть $\xi_1+\eta_2=\xi_2+\eta_1$ и $\eta_1+\zeta_2=\eta_2+\zeta_1$ (ξ_i, η_i $\zeta_i\in M$; $i=1,\ 2$). Тогда $\xi_1+\zeta_2+(\eta_1+\eta_2)=\xi_2+\zeta_1+(\eta_1+\eta_2)$ и, следовательно, поскольку M — полугруппа с сокращением, $\xi_1+\zeta_2=\xi_2+\zeta_1$, так что $((\xi_1,\ \xi_2),\ (\zeta_1,\ \zeta_2))\in\omega$.

Нетрудно понять, что отношение эквивалентности ω согласовано со структурой конического пространства в M^2. Поэтому можно говорить о фактор-пространстве $X=M^2/\omega$. Докажем, что для X удовлетворены условия предложения III. Пусть $x\in X$. Возьмем какую-нибудь пару $(\xi,\ \eta)\in x$ и обозначим через x' тот класс эквивалентности, который содержит пару $(\eta,\ \xi)$. Ясно, что класс x' однозначно определяется классом x. Поскольку класс $x+x'$ содержит пару $(\xi+\eta,\ \eta+\xi)$, эквивалентную паре $(\mathbf{0},\ \mathbf{0})$, сумма $x+x'$ есть нулевой элемент фактор-пространства X. Согласно предложению III структура конического пространства в X продолжается до структуры векторного пространства.

Обозначим через Φ отображение, сопоставляющее элементу $\xi\in M$ класс эквивалентности, содержащий пару $(\mathbf{0},\ \xi)$. Отображение Φ, очевидно, предлинейно. Далее, если $\Phi(\xi)=\Phi(\eta)$, т. е. если пары $(\mathbf{0},\ \xi)$ и $(\mathbf{0},\ \eta)$ эквивалентны, то по определению эквивалентности $\eta=\mathbf{0}+\eta=\xi+\mathbf{0}=\xi$. Таким образом, Φ — взаимно-однозначно. Поскольку Φ — предлинейно, образ $K=\Phi[M]$ является конусом. При этом если $x\in X$ и $(\xi,\ \eta)\in x$, то ввиду того, что $(\xi,\ \eta)=(\mathbf{0},\ \eta)+(\xi,\ \mathbf{0})$, можно написать: $x=v-u$, где v — класс эквивалентности, содержащий пару $(\mathbf{0},\ \eta)$, а u — пару $(\mathbf{0},\ \xi)$. Заметив, что u, $v\in K$, заключаем, что конус K — воспроизводящий.

Замечание 1. О векторном пространстве X, построенном в теореме, говорят, что оно *порождено* векторным предпространством M. Если, как это обычно делается, отождествить множества, наделенные изоморфными структурами, то можно считать, что M совпадает с воспроизводящим конусом в векторном пространстве X.

Замечание 2. Пространство X определяется предпространством M единственным (с точностью до изоморфизма) образом. Именно если Y — такое векторное пространство, что существует изоморфизм Ψ предпространства M на воспроизводящий конус L пространства Y, то существует изоморфизм Θ векторного пространства X на векторное пространство Y, отображающий конус K на конус L. Действительно, если обозначить, как и в доказательстве теоремы, через Φ изоморфизм предпространства M на конус K, то отображение $A=\Psi\circ\Phi^{-1}$ будет предлинейным оператором, который в силу предложения II может быть распространен до линейного оператора Θ, отображающего пространство X в пространство Y. Если $x\in\Theta^{-1}[\mathbf{0}]$, то, представляя x в виде $x=x_1-x_2$, где x_1, $x_2\in K$, можем написать: $\mathbf{0}=\Theta(x)=A(x_1)-A(x_2)$. Так как A — взаимно-однозначен, то $x_1=x_2$, т. е. $x=\mathbf{0}$. Следовательно, и Θ — взаимно-однозначен. Далее, $\Theta[K]=$ $=A[K]=\Psi[\Phi^{-1}[K]]=\Psi[M]=L$. Область значений линейного оператора Θ — линейное множество, содержащее воспроизводящий конус L. Поэтому она совпадает с линейной оболочкой множества L, т. е. с Y.

I.1.2. Дадим теперь определение упорядоченного пространства.

Рассмотрим векторное пространство X. Предположим, что в множестве X имеется порядок σ. Будем говорить, что он *согласован* со структурой векторного пространства, если множество σ является конусом в векторном пространстве X^2. Иначе говоря, если из соотношений $x\leqslant u$, $y\leqslant v$, α, $\beta\in\mathbf{R}^+$ (x, u, y, $v\in X$) вытекает, что $\alpha x+\beta y\leqslant\alpha u+\beta v$.

Если порядок σ согласован со структурой векторного пространства X, то пара (X, σ) называется *упорядоченным векторным пространством*[5].

Очевидно, само поле скаляров $\mathbf{R}$ вместе со стандартным порядком представляет собой упорядоченное векторное пространство.

---

[5] Как всегда в подобных случаях, в обозначении упорядоченного векторного пространства указание на порядок опускается.

Если имеется семейство $\{X_t\}$ $(t \in T)$ упорядоченных векторных пространств, то, снабжая произведение $X = \prod_{t \in T} X_t$ канонической структурой векторного пространства и каноническим порядком (по поводу последнего см. **0.2.1**), мы получим упорядоченное векторное пространство, которое называется *произведением* данного семейства упорядоченных векторных пространств. Напомним, что алгебраические операции и порядок в произведении X определяются покоординатно: если x, $y \in X$, α, $\beta \in \mathbf{R}$, то $(\alpha x + \beta y)(t) = \alpha x(t) + \beta y(t)$ $(t \in T)$, $x \leqslant y$ означает, что $x(t) \leqslant y(t)$ при каждом $t \in T$. В частности, совокупность X^T всех отображений некоторого множества T в упорядоченное векторное пространство X каноническим образом обращается в упорядоченное векторное пространство.

Если X_0 — линейное множество в упорядоченном векторном пространстве, то индуцированные из X на X_0 структура векторного пространства и порядок, как нетрудно видеть, согласованы. Множество X_0 вместе с указанными индуцированными структурами называется *подпространством* упорядоченного векторного пространства X.

Укажем на некоторые следствия из определения упорядоченного векторного пространства.

I. *Пусть u — элемент упорядоченного векторного пространства X (с порядком σ), λ — строго положительный скаляр. Отображения $\varphi_u : x \longrightarrow x + u$ $(x \in X)$ и ψ_λ: $x \longrightarrow \lambda x$ $(x \in X)$ являются изоморфизмами упорядоченного множества X на себя*[6]. *Отображение $\Gamma : x \longrightarrow -x$ $(x \in X)$ является антиизоморфизмом упорядоченного множества X на себя, т. е. изоморфизмом упорядоченного множества (X, σ) на упорядоченное множество (X, σ^{-1}).*

Действительно, монотонность отображений φ_u и ψ_λ очевидна. А так как $\varphi_u^{-1} = \varphi_{-u}$, $\psi_\lambda^{-1} = \psi_{\frac{1}{\lambda}}$, то монотонны обратные отображения.

Утверждение относительно отображения Γ вытекает из соотношения $(-y, -x) = (-x, -x) + (-y, -y) + (x, y)$ $(x, y \in X)$. Поэтому если $(x, y) \in \sigma$, то $(-y, -x) \in \sigma$, т. е. $(\Gamma(x), \Gamma(y)) \in \sigma^{-1}$.

[6] Часто именно это свойство порядка в упорядоченном векторном пространстве берут в качестве определения упорядоченного векторного пространства.

Поскольку отображения φ_u и ψ_λ сохраняют точные границы, то для любого множества $E \subset X$, элемента $u \in X$ и строго положительного скаляра λ будет

$$\begin{aligned} &\sup(u+E)=u+\sup E, \quad \inf(u+E)=u+\inf E; \\ &\sup(\lambda E)=\lambda \sup E, \quad \inf(\lambda E)=\lambda \inf E; \qquad (2) \\ &\sup(-E)=-\inf E, \quad \inf(-E)=-\sup E. \end{aligned}$$

При этом из существования точной границы в одной из частей каждого из этих равенств вытекает существование точной границы в другой части.

Если E_1, E_2 — множества в упорядоченном векторном пространстве X, имеющие точные верхние границы, то из (2) на основании свойства ассоциативности точных границ (предложение V из **0.2.2**) вытекает:

$$\sup(E_1+E_2)=\sup_{u\in E_1}(\sup(u+E_2))=$$
$$=\sup_{u\in E_1}(u+\sup E_2)=\sup E_1+\sup E_2.$$

Аналогично в предположении существования $\inf E_1$ и $\inf E_2$ справедливо

$$\inf(E_1+E_2)=\inf E_1+\inf E_2.$$

II. *Пусть x и y — такие элементы упорядоченного векторного пространства X, что существует точная верхняя граница $x\vee y$. Тогда существует и точная нижняя граница $x\wedge y$, причем*

$$(x\wedge y)+(x\vee y)=x+y.$$

Действительно, на основании (2) можно написать:

$$x+y-(x\vee y)=x+y+[(-x)\wedge(-y)]=(x+y-x)\wedge$$
$$\wedge(x+y-y)=y\wedge x.$$

Конус K в векторном пространстве X называется *острым* или *упорядочивающим*, если $K\cap(-K)=\{0\}$.

III. *Если σ — порядок в упорядоченном векторном пространстве X, то множество $\sigma[0]$ является упорядочи-*

вающим конусом. Обратно, если K — упорядочивающий конус в векторном пространстве X, то в X существует единственный согласованный со структурой векторного пространства порядок σ такой, что $K=\sigma[0]$. При этом для каждого $u\in X$ будет $\sigma[u]=u+K$.

В самом деле, если $x, y\in\sigma[0]$, т. е. если $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, то при $\alpha, \beta\in\mathbf{R}^+$ будет $\alpha x+\beta y\geqslant 0$, так что $\alpha x+\beta y\in\sigma[0]$. На основании предложения I, кроме того, $-\sigma[0]=\sigma^{-1}[0]$. Следовательно, $\sigma[0]\cap(-\sigma[0])=\{0\}$.

Пусть теперь K — упорядочивающий конус в векторном пространстве X. Положим $\sigma=\{(x, y)\in X^2 : y-x\in K\}$. Так как $0\in K$, то $\sigma\supset I_X$. Далее, $\sigma^{-1}=\{(x, y)\in X^2 : y-x\in -K\}$. Поэтому

$$\sigma\cap\sigma^{-1}=\{(x, y)\in X^2 : y-x\in K\cap(-K)\}=$$
$$=\{(x, y)\in X^2 : x=y\}=I_X.$$

Наконец, $\sigma\circ\sigma=\{(x, y)\in X^2 : y-x\in K+K\}$. Учитывая, что $K+K=K$, получаем $\sigma\cdot\sigma=\sigma$. Возьмем положительные скаляры α и β. Пусть (x, u), $(y, v)\in\sigma$. Поскольку $(\alpha u+\beta v)-(\alpha x+\beta y)=\alpha(u-x)+\beta(v-y)$, а $u-x$, $v-y\in K$, то $(\alpha u+\beta v)-(\alpha x+\beta y)\in K$, т. е. $\alpha(x, u)+\beta(y, v)\in\sigma$. Таким образом, множество σ — конус в в пространстве X^2, т. е. порядок σ согласован со структурой векторного пространства в X. Непосредственно из определения следует, что $K=\sigma[0]$. Используя результат предложения I, можем написать: $u+K=\varphi_u[K]=\varphi_u[[0,\rightarrow]]=[u,\rightarrow]=\sigma[u]$. Отсюда, в частности, вытекает справедливость утверждения о единственности порядка σ.

Элементы конуса $K=\sigma[0]$ упорядоченного векторного пространства X называются *положительными*, а сам конус K — *конусом положительных элементов* (пространства X).

IV. *Для того, чтобы конус K положительных элементов упорядоченного векторного пространства X был воспроизводящим, необходимо и достаточно, чтобы каждое конечное множество в X было ограничено сверху.*

В самом деле, рассмотрим множество $E\subset X$, состоящее из двух элементов x и y. Если конус K — воспроизводящий, то существуют такие элементы $u, v\in K$, что $y-x=v-u$ (предложение I из 1.1), так что $x+v=y+u$.

Это означает, что $\pi_\sigma(E)=\sigma[x]\cap\sigma[y]=(x+K)\cap(y+$ $+K)\neq\varnothing$, т. е. что множество E ограничено сверху. Случай, когда число элементов множества E больше двух, исчерпывается по индукции.

Чтобы доказать достаточность условия, рассмотрим элемент $x\in X$ и множество $E=\{x, \mathbf{0}\}$. Если оно ограничено сверху, то пересечение $K\cap(x+K)\neq\varnothing$. Взяв элемент u из этого пересечения и положив $v=u-x$, будем иметь $u, v\in K$, $x=u-v$. Следовательно, $X=K-K$. Таким образом, K — воспроизводящий конус.

Дадим абстрактную характеристику упорядочивающего конуса. Рассмотрим векторное предпространство M и порожденное им векторное пространство X (теорема 1). Пусть Φ — вложение предпространства M в пространство X и $K=\Phi[M]$.

V. *Для того, чтобы конус K был упорядочивающим, необходимо и достаточно, чтобы векторное предпространство M удовлетворяло условию: соотношение $\xi+\eta=\mathbf{0}$ (ξ, $\eta\in M$) выполняется лишь в случае, когда один из элементов ξ или η совпадает с нулевым (так как M — полугруппа с сокращением, то обращение в нуль одного из элементов ξ или η влечет равенство нулю и другого).*

В самом деле, соотношение $x\in K\cap(-K)$ равносильно тому, что $\Phi^{-1}(x)+\Phi^{-1}(-x)=\mathbf{0}$. Поэтому если выполнено условие предложения, то $\Phi^{-1}(x)=\mathbf{0}$ и, следовательно, $x=\mathbf{0}$, так что K — упорядочивающий конус. Обратно, если ξ и η — такие элементы из M, что $\xi+\eta=\mathbf{0}$, $x=\Phi(\xi)$, $y=\Phi(\eta)$, то $x+y=\mathbf{0}$, т. е. $y=-x$. Таким образом, $x\in K\cap(-K)$. В случае, когда конус K — упорядочивающий, последнее соотношение дает $x=\mathbf{0}$ и, стало быть, $\xi=\mathbf{0}$.

В условиях предложения V обозначим через ρ множество всех таких пар $(\xi, \eta)\in M^2$, что существует элемент $\zeta\in M$, удовлетворяющий соотношению $\xi+\zeta=\eta$. Если через σ обозначить порядок в векторном пространстве X, который в соответствии с предложением III определяется конусом K, а через σ_0 — индуцированный порядок в конусе K, то, как очевидно, $\rho=\Phi^{-1}\circ\sigma_0\circ\Phi$, так что ρ также является порядком (в множестве M). Векторное предпространство M вместе с порядком ρ называется *упорядоченным векторным предпространством.* Важно отметить, что вложение Φ будет не только агебраическим, но и порядковым изоморфизмом упорядоченного векторного предпространства M в упорядоченное векторное пространство X.

I.1.3. Укажем на некоторые стандартные конструкции, которые, отправляясь от данных упорядоченных векторных пространств, приводят к новым упорядоченным векторным пространствам.

Пусть X — упорядоченное векторное пространство с конусом K положительных элементов. Если подпространство X_0 векторного пространства X снабдить порядком σ_0, индуцированным порядком σ пространства X, то, очевидно, X_0 обратится в упорядоченное векторное пространство, которое называется *подпространством* данного *упорядоченного векторного пространства* X. Ясно, что конус $K_0 = \sigma_0[\mathbf{0}]$ положительных элементов пространства X_0 совпадает с пересечением $K \cap X_0$. Следует иметь в виду, что даже в случае воспроизводящего конуса K конус K_0 может не быть воспроизводящим.

Пусть теперь $\{X_t\}$ $(t \in T)$ — семейство упорядоченных векторных пространств. Снабжая множество $X = \prod_{t \in T} X_t$ каноническими — покоординатными — порядком и структурой векторного пространства, получим, как уже отмечалось, упорядоченное векторное пространство, которое называется *произведением* данного семейства упорядоченных векторных пространств. Ясно, что конус K положительных элементов пространства X совпадает с произведением $\prod_{t \in T} K_t$ (здесь K_t — конус положительных элементов пространства X_t).

Для элемента $x \in X$ положим $\operatorname{supp} x = \{t \in T : x(t) \neq \mathbf{0}_t\}$, где $\mathbf{0}_t$ — нулевой элемент пространства X_t. Множество X_0 всех таких элементов $x \in X$, что множество $\operatorname{supp} x$ — конечно, называется *прямой суммой* семейства $\{X_t\}$ $(t \in T)$ и обозначается символом $\Sigma_{t \in T} X_t$. Так как при $x, y \in X$; $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ имеем $\operatorname{supp}(\alpha x + \beta y) \subset \operatorname{supp} x \cup \operatorname{supp} y$, то X_0 — линейное множество и, стало быть, прямая сумма $\Sigma_{t \in T} X_t$ будет упорядоченным векторным пространством — подпространством произведения X. Понятно, что конус K_0 положительных элементов прямой суммы состоит из всех таких положительных элементов $x \in X$, что множество $\operatorname{supp} x$ конечно. Это дает основание для записи $K_0 = \Sigma_{t \in T} K_t$, где, как и выше, под K_t подразумевается конус положительных элементов пространства X_t.

Рассмотрим вопрос о фактор-пространстве упорядоченного векторного пространства.

Пусть X и Y — векторные пространства, A — линейный оператор, отображающий X на Y, K — конус в пространстве X. Образ $L=A[K]$ конуса K, очевидно, является конусом в пространстве Y. В силу предложения V из **1.2** L будет упорядочивающим конусом, если выполнено условие: $A(x_1+x_2)=\mathbf{0}$ $(x_1, x_2\in K)$ в том и только в том случае, когда $A(x_1)=A(x_2)=\mathbf{0}$. В частности, если X — упорядоченное векторное пространство и K — конус положительных элементов пространства X, то указанное условие означает, что конус $K_0=K\cap X_0$ $(X_0=A^{-1}[\mathbf{0}])$ *нормально содержится в конусе* K: если $x\in K_0$, то и $[\mathbf{0}, x]\subset K_0$. Действительно, если $x=x_1+x_2\in \in X_0$ $(x_1, x\in K)$, то при этом x_1, $x_2\in[\mathbf{0}, x]\subset K_0\subset X_0$. Обратно, предполагая, что $x_1\in[\mathbf{0}, x]$, в силу равенства $x=x_1+(x-x_1)$ будем иметь $x_1\in K_0$, если $x\in K_0$.

Если конус L — упорядочивающий, то в соответствии с предложением III из **1.2** он определяет в пространстве Y порядок ρ, согласованный со структурой векторного пространства и такой, что $L=\rho[\mathbf{0}]$.

Пусть X_0 — подпространство упорядоченного векторного пространства X. Подразумевая под Y фактор-пространство $\overline{X}=X/X_0$ и под A — канонический гомоморфизм φ пространства X на фактор-пространство $\overline{X}$, получим

I. *Пусть X — упорядоченное векторное пространство с конусом K положительных элементов; если X_0 — такое подпространство пространства X, что конус $K_0=K\cap X_0$ нормально содержится в K, то в факторе-пространстве $\overline{X}=X/X_0$ существует согласованный со структурой векторного пространства порядок ρ такой, что $\overline{K}=\rho[\mathbf{0}]=\varphi[K]$.*

Очевидно, соотношение $\overline{K}=\rho[\mathbf{0}]=\varphi[K]$ определяет порядок ρ однозначно. Присоединяя к векторному пространству $\overline{X}$ порядок ρ, получим упорядоченное векторное пространство, которое называется *фактор-пространством* упорядоченного векторного пространства X (по подпространству X_0). Порядок ρ в $\overline{X}$ называется при этом *фактор-порядком*. Нетрудно понять, что канонический гомоморфизм φ при таком определении порядка в $\overline{X}$ оказывается монотонным отображением, так что если x, $y\in X$ и $x\leqslant y$, то $\varphi(x)\leqslant\varphi(y)$. Обратно, если элементы $\overline{x}$, $\overline{y}$ из фактор-пространства $\overline{X}$ таковы, что $\overline{x}\leqslant\overline{y}$, то, поскольку $\overline{y}-\overline{x}\in\overline{K}$, можно указать элемент $z\in K$ так, что

$\varphi(z)=\bar{y}-\bar{x}$. Поэтому если $x\in\bar{x}$, то $\varphi(x+z)=\bar{x}+(\bar{y}-\bar{x})=\bar{y}$, т. е. элемент $y=x+z$ входит в класс $\bar{y}$ и $x\leqslant y$. Точно так же для любого элемента $y\in\bar{y}$ можно подобрать элемент $x\in\bar{x}$ так, что будет $x\leqslant y$.

Если конус K — воспроизводящий, то воспроизводящим будет и конус $\bar{K}$ в фактор-пространстве. Действительно, как легко проверить, $\mathscr{L}(\bar{K})=\mathscr{L}(\varphi[K])=\varphi[\mathscr{L}(K)]=\varphi[X]=\bar{X}$.

В конкретных ситуациях условия предложения I могут соблюдаться за счет того, что конус K_0 оказывается не достаточно представительным, как это, например, происходит в случае, когда $X=\mathbf{R}^2$, $X_0=\{(\xi,\eta)\in\boldsymbol{R}^2:\xi+\eta=0\}$. При этом конус K_0 сводится к единственному элементу $(0,0)$, так что условия предложения I выполнены тривиальным образом.

Если игнорировать подобные «плохие» случаи, то можно высказать следующий результат.

Теорема 2(1.1). *Пусть X — упорядоченное векторное пространство с конусом K положительных элементов и X_0 — его подпространство, удовлетворяющее условиям предложения I. Если линейная оболочка конуса $K_0=K\cap X_0$ совпадает с X_0, т. е. если $X_0=K_0-K_0$, то канонический гомоморфизм φ пространства X на фактор-пространство $\bar{X}=X/X_0$ сохраняет точные границы конечных множеств.*

Доказательство. Обозначим через σ_0 порядок в X_0, индуцированный порядком σ в X. Поскольку $K_0=\sigma_0[0]$ и в условиях теоремы конус K_0 — воспроизводящий (в X_0), то согласно предложению IV из 1.2 упорядоченное векторное пространство X_0 обладает тем свойством, что каждое конечное множество в нем ограничено сверху. Иными словами, множество X_0 фильтруется по возрастанию (и, как нетрудно понять, по убыванию). Так как при любом $u\in X$ отображение $x\longrightarrow x+u$ $(x\in X)$ является изоморфизмом упорядоченного множества X на себя (предложение I из 1.2), то и множество $u+X_0$ также фильтруется по возрастанию, каково бы ни было $u\in X$.

Рассмотрим теперь конечное множество $E\subset X$, имеющее точную верхнюю границу z. В силу монотонности отображения φ будет $\varphi(x)\leqslant\varphi(z)=\bar{z}=z+X_0$ для каждого $x\in E$, т. е. $\bar{z}\in\pi_\rho(\varphi[E])$ (через ρ здесь обозначен порядок в фактор-пространстве $\bar{X}$). Пусть $\bar{u}\in\pi_\rho(\varphi[E])$. Ввиду того, что для $x\in E$ справедливо соотношение

$\varphi(x) \leqslant \bar{u}$, для некоторого $u_x \in \bar{u}$ будет $x \leqslant u_x$. В силу сделанного в начале доказательства замечания семейство $\{u_x\}$ $(x \in E)$ ограничено сверху в $\bar{u}$. Пусть $u \in \bar{u}$ — какая-либо верхняя граница указанного семейства. Ясно, что u служит также верхней границей и множества E, вследствие чего $z = \sup E \leqslant u$. Но тогда $\bar{z} = \varphi(z) \leqslant \varphi(u) = \bar{u}$. Этим доказано, что класс $\varphi(z)$ является точной верхней границей множества $\varphi[E]$ (предложение II из **0.2.2**).

С помощью соотношений (2) без труда устанавливается, что φ сохраняет и точные нижние границы конечных множеств.

Подпространство X_0, удовлетворяющее условиям теоремы, будем называть *нормальным.*

II. *Если K_0 — конус в упорядоченном векторном пространстве X, нормально содержащийся в конусе K положительных элементов пространства X, то линейная оболочка $X_0 = K_0 - K_0$ конуса K_0 представляет собой нормальное подпространство. При этом $X_0 \cap K = K_0$.*

Действительно, достаточно убедиться в справедливости равенства $X_0 \cap K = K_0$. Пусть $x \in X_0 \cap K$. Найдутся такие элементы u, $v \in K_0$, что $x = v - u$. В силу нормальности конуса K_0 соотношение $0 \leqslant x \leqslant x + u = v$ влечет включение $x \in K_0$.

Укажем на один пример нормального подпространства. Пусть $\{X_t\}$ $(t \in T)$ — семейство упорядоченных векторных пространств. Предположим, что при каждом $t \in T$ конус K_t положительных элементов пространства X — воспроизводящий. Тогда прямая сумма $X_0 = \Sigma_{t \in T} X_t$ будет нормальным подпространством пространства $X = \prod_{t \in T} X_t$.

Действительно, обозначая через K конус положительных элементов упорядоченного векторного пространства X, т. е. полагая $K = \prod_{t \in T} K_t$, будем иметь $K_0 = K \cap X_0 = \Sigma_{t \in T} K_t$, откуда ясно, что K_0 нормально содержится в конусе K. Равенство $X_0 = K_0 - K_0$ очевидно.

1.1.4. Рассмотрим упорядоченные векторные пространства X и Y с порядками σ и ρ соответственно. Пусть A — линейный оператор, отображающий пространство X в пространство Y и A_0 — его сужение на конус $K = \sigma[0]$ положительных элементов пространства X.

I. *Для того чтобы оператор A был монотонным, необходимо и достаточно, чтобы предлинейный оператор A_0*

был положительным элементом упорядоченного векторного пространства Y^K, т. е. чтобы $A[K]=A_0[K]\subset\rho[0]$.

Действительно, пусть A — монотонный оператор. Это означает (см. **0.2.1**), что $A\circ\sigma\subset\rho\circ A$, так что $A[K]=A[\sigma[0]]\subset\rho[A[0]]=\rho[0]$. Если, наоборот, A_0 — положительный элемент пространства Y^K, то при любом $x\in X$ согласно предложению II из **1.2** будет

$$A[\sigma[x]]=A[x+\sigma[0]]=A(x)+A_0[K]\subset A(x)+\rho[0]=$$
$$=\rho[A(x)]=\rho[A[x]].$$

Таким образом, $A\circ\sigma\subset\rho\circ A$, т. е. оператор A — монотонный.

Предположим, что в пространстве X выделено подпространство X_0, удовлетворяющее условиям предложения I из **1.3**. Введем фактор-пространство $\overline{X}=X/X_0$ и обозначим через φ канонический гомоморфизм пространства X на фактор-пространство $\overline{X}$. Под A будем подразумевать линейный оператор, допускающий снижение $\overline{A}$ на фактор-пространство $\overline{X}$.

II. *Операторы A и $\overline{A}$ одновременно монотонны или нет.*

В самом деле, множество $\overline{K}=\varphi[K]$ является конусом положительных элементов в фактор-пространстве $\overline{X}$. Так как $A=\overline{A}\circ\varphi$, то $A[K]=\overline{A}[\varphi[\overline{K}]]=\overline{A}[\overline{K}]$ и остается воспользоваться результатом предложения I.

Множество $L^+=L^+(X, Y)$ всех монотонных операторов является, очевидно, конусом в векторном пространстве $L(X, Y)$ всех линейных операторов, отображающих пространство X в пространство Y.

III. *Для того чтобы конус L^+ был упорядочивающим, необходимо и достаточно, чтобы конус K был воспроизводящим.*

Действительно, рассмотрим такие монотонные операторы A и B, что $A+B=0$. Для любого $x\in K$ будет $A(x)+B(x)=0$. Но согласно предложению I $A(x)$, $B(x)\in\rho[0]$, так что, поскольку конус $\rho[0]$ — упорядочивающий, $A(x)=B(x)=0$. Следовательно, оператор A обращается в нуль и на линейной оболочке $X_0=\mathscr{L}(K)=K-K$ конуса K. Если конус K — воспроизводящий, т. е. если $X_0=X$, то $A=0$. В случае же когда $X_0\neq X$, нетрудно показать, что существует линейный оператор

$A \neq 0$, который, однако, обращается в нуль на X_0. Поскольку $K \subset X_0$, то на основании предложения I A будет монотонным оператором. Ясно, что этим свойством обладает и оператор $B = -A$.

Предполагая конус K воспроизводящим, снабдим векторное пространство $L(X, Y)$ порядком, определяемым в соответствии с предложением III из **1.2** конусом L^+. В дальнейшем, говоря о пространстве $L(X, Y)$ как об упорядоченном векторном пространстве, мы будем всегда подразумевать этот порядок. Монотонные операторы образуют в указанном пространстве конус положительных элементов, в связи с чем будем говорить о таких операторах как о *положительных* операторах.

Конус L^+, вообще говоря, довольно беден по составу элементов. Лишь в исключительных случаях он оказывается воспроизводящим. Это обстоятельство делает целесообразным введение следующего понятия. Предполагая конус K воспроизводящим, рассмотрим оператор $A \in L(X, Y)$. Этот оператор называется *регулярным*, если существует такой положительный оператор $B \in L(X, Y)$, что $A \leqslant B$. Легко понять, что совокупность $L^r(X, Y)$ всех регулярных операторов совпадает с линейной оболочкой $L^+ - L^+$ конуса L^+ положительных операторов. Действительно, если $A \leqslant B$, где $B \in L^+$, то $A = B - (B - A)$, и остается заметить, что $B - A \in L^+$. Обратно, если $A = A_1 - A_2$, где A_1, $A_2 \in L^+$, то $A \leqslant A_1$.

Из сказанного следует, что множество $L^r(X, Y)$ линейно в пространстве $L(X, Y)$. Ясно также, что $L^+ \subset L^r(X, Y)$, причем в пространстве $L^r(X, Y)$ конус L^+ будет уже воспроизводящим.

Отметим еще, что если A — регулярный оператор и E — ограниченное множество в пространстве X, то образ $A[E]$ ограничен в пространстве Y.

§ 2. ВЕКТОРНЫЕ РЕШЕТКИ

Упорядоченные векторные пространства представляют собой настолько общий класс объектов, что сколько-нибудь содержательная их теория едва ли возможна. Поэтому целесообразно выделить более узкий класс пространств, обладающих более высокой квалификацией.

1.2.1. Упорядоченное векторное пространство, являющееся решеткой, называется *векторной решеткой*[7].

Основываясь на предложении I из **1.2**, нетрудно понять, что упорядоченное векторное пространство X будет векторной решеткой тогда и только тогда, когда для каждого $x \in X$ существует точная верхняя граница $x^+ = x \vee 0$, называемая *положительной частью* x. Действительно, при этом условии для произвольных элементов $u, v \in X$ существует точная верхняя граница.

$$u \vee v = [(u - v) \vee 0] + v = (u - v)^+ + v \tag{1}$$

и точная нижняя граница $(u \wedge v) = v - (v - u)^+$.

Если x — элемент векторной решетки X, то элемент $x^- = (-x)^+ = -[x \wedge 0]$ называется *отрицательной частью* элемента x.

Проверка решеточности упорядоченного векторного пространства может быть сведена к проверке этого свойства лишь для конуса положительных элементов.

I. *Пусть X — упорядоченное векторное пространство с воспроизводящим конусом положительных элементов K. Для того чтобы X было векторной решеткой, необходимо и достаточно, чтобы конус K, снабженный индуцированным порядком, был верхней решеткой*[8]. *Если это условие выполнено, то вложение i: $K \longrightarrow X$ сохраняет точные границы непустых множеств.*

Действительно, отметим сначала, что даже без предположения решеточности пространства X вложение i сохраняет точные верхние границы непустых множеств. Обозначим порядок в X через σ, а индуцированный им порядок в K — через σ_0. Для непустого множества $E \subset K$ будет $\pi_\sigma(E) \subset K$. Поэтому $\pi_{\sigma_0}(E) = \pi_\sigma(E) \cap K = \pi_\sigma(E)$, откуда и вытекает, что σ_0-$\sup E$ и σ-$\sup E$ существуют или нет одновременно и если существуют, то совпадают. Учитывая доказанное и предполагая, что X — верхняя решетка, будем иметь для произвольного элемента $x \in X$ на основании предложения I из **1.2**: если $x = u - v$, где $u, v \in K$, то $(u \vee v) - v = (u - v) \vee 0 = x^+$, так что согласно сказанному ранее X — векторная решетка. Необходимость условия предложения очевидна.

---

[7] В советской математической литературе можно встретить также термин «K-линеал».

[8] Такие конусы часто называют *миниэдральными*.

Предполагая, что X — векторная решетка, рассмотрим множество $E \subset K$, для которого существует σ_0-$\inf E = u$. Это означает, что $\pi_{\sigma_0}^{-1}(E) = [0, u]$. Если $y \in \pi_\sigma^{-1}(E)$, то, поскольку $E \subset K$, будет $y^+ \in \pi_\sigma^{-1}(E) \cap K = \pi_{\sigma_0}^{-1}(E) = [0, u]$. Следовательно, $y \leqslant y^+ \leqslant u$. Остается заметить, что $u \in \pi_\sigma^{-1}[E]$.

Без требования решеточности пространства X утверждение о сохранении отображением i точных нижних границ может быть и неверно, в чем читатель без труда убедится самостоятельно.

II. *Если X — векторная решетка, то для любого элемента $x \in X$ выполняется*

$$x = x^+ - x^-; \quad x^+ \wedge x^- = 0. \tag{2}$$

Если x_1, x_2 — такие положительные элементы, что $x = x_1 - x_2$, то $x^+ \leqslant x_1$, $x^- \leqslant x_2$. Если при этом $x_1 \wedge x_2 = 0$, то $x_1 = x^+$, $x_2 = x^-$.

Действительно, в силу предложения I из **1.2** имеем $x^+ = x \vee 0 = x + [0 \vee (-x)] = x + x^-$ (ср. (1)).

Далее, в силу уже доказанного

$$x^+ \wedge x^- = x^+ + [0 \wedge (x^- - x^+)] = x^+ - [0 \vee (x^+ - x^-)] = \\ = x^+ - x^+ = 0.$$

Пусть x_1, x_2 — такие положительные элементы пространства X, что $x = x_1 - x_2$. Поскольку $x \leqslant x_1$, $0 \leqslant x_1$, то и $x^+ = x \vee 0 \leqslant x_1$. Так как $-x = x_2 - x_1$, то $x^- = (-x)^+ \leqslant x_2$. Учитывая, что $x = x^+ - x^- = x_1 - x_2$, можем написать: $x_1 - x^+ = x_2 - x^-$. Поэтому если $x_1 \wedge x_2 = 0$, то $x_1 - x^+ = (x_1 - x^+) \wedge (x_2 - x^-) \leqslant x_1 \wedge x_2 = 0$. Но согласно доказанному $x_1 - x^+ \geqslant 0$. Значит, $x_1 = x^+$, $x_2 = x^-$.

Первое из соотношений (2) показывает, что конус K положительных элементов в векторной решетке X — воспроизводящий. Впрочем, этот факт с помощью предложения IV из **1.2** вытекает из самого определения векторной решетки. Предложение I дает, однако, существование представления элемента $x \in X$ в виде разности положительных элементов с наименьшими составляющими: $x = x^+ - x^-$.

Нетрудно проверить, что это свойство полностью характеризует векторные решетки.

Рассмотрим упорядоченные векторные пространства X и Y и отображение U пространства X в пространство Y. Это отображение называется *сублинейным*, если

$$U(\alpha x_1+\beta x_2)\leqslant\alpha U(x_1)+\beta U(x_2) \qquad (x_1,\ x_2\in X;$$
$$\alpha,\ \beta\in\mathbf{R}^+). \tag{3}$$

Сублинейность отображения U равносильна совокупности двух свойств: *полуаддитивности* отображения U, т. е.

$$U(x_1+x_2)\leqslant U(x_1)+U(x_2) \qquad (x_1,\ x_2\in X), \tag{4}$$

и *положительной однородности*, т. е.

$$U(\alpha x)=\alpha U(x) \qquad (x\in X;\ \ \alpha\in\mathbf{R}^+). \tag{5}$$

Действительно, если U — сублинейное отображение, $x\in\in X$, α — строго положительный скаляр, то $U(\alpha x)\leqslant\leqslant\alpha U(x)=\alpha U\left(\frac{1}{\alpha}.\alpha x\right)\leqslant U(\alpha x)$, так что $U(\alpha x)=\alpha U(x)$.

III. *Пусть X — векторная решетка. Отображение P: $x\longrightarrow x^+$ $(x\in X)$ сублинейно и сохраняет точные границы.*

В самом деле, пусть $x_1,\ x_2\in X$; $\alpha,\ \beta\in\mathbf{R}^+$. Так как $\alpha x_1+\beta x_2=(\alpha x_1^+ +\beta x_2^+)-(\alpha x_1^- +\beta x_2^-)$ и $\alpha x_1^+ +\beta x_2^+$, $\alpha x_1^- +\beta x_2^-\geqslant\mathbf{0}$, то на основании предложения II $P(\alpha x_1+ +\beta x_2)=(\alpha x_1+\beta x_2)^+\leqslant\alpha x_1^+ +\beta x_2^+=\alpha P(x_1)+\beta P(x_2)$.

Рассмотрим множество $E\subset X$, имеющее точную верхнюю границу v. На основании свойства ассоциативности точных границ

$$v^+=v\vee\mathbf{0}=\sup_{x\in E}(x\vee\mathbf{0})=\sup_{x\in E}x^+=\sup P[E].$$

Таким образом, отображение P сохраняет точные верхние границы и, следовательно, монотонно.

Предположим теперь, что у множества E существует точная нижняя граница u и пусть w — какая-либо нижняя граница множества $P[E]$. Ввиду монотонности отображения P для каждого $x\in E$ будет $u^-=P(-u)\geqslant P(-x)==x^-$. Следовательно, для таких x справедливо соотношение $w-u^-\leqslant x^+-x^-=x$, так что $w-u^-\leqslant\inf E=u$. Тем самым $w \leqslant u + u^- = u^+$. Поскольку для $x \in E$, очевидно, $u^+ \leqslant x^+$, то u^+ является наибольшей нижней границей множества $P[E]$, т. е. $u^+ = \inf P[E]$.

Наряду с P рассмотрим отображение N: $x \longrightarrow x^-$ $(x \in X)$. Основываясь на соотношении $P(-x) = N(x)$ $(x \in X)$, докажем с помощью предложения III

IV. *Отображение N — сублинейно. При этом справедливы соотношения*

$$N(\sup E) = \inf N(E), \qquad N(\inf E) = \sup N(E) \tag{6}$$

в предположении, что существуют точные границы множества $E \subset X$ в левой части каждого из них.

В самом деле, на основании предложения I из **1.2**

$$N(\sup E) = P(-\sup E) = P(\inf(-E)) = \inf P[-E] = \\ = \inf N[E].$$

Аналогично проверяется и второе из соотношений (6).

Важнейшим следствием предложения IV является

V. *В векторной решетке X имеют место оба дистрибутивных закона.*

Действительно, пусть E — множество в пространстве X, имеющее точную нижнюю границу u и $z \in X$. Согласно предложению I из **1.2** существует $\inf(E - z) = u - z$. Следовательно (см. (1)),

$$z \vee u = z + (u - z)^+ = z + P(\inf(E - z)) = z + \inf_{x \in E} (x - z)^+ = \\ = \inf_{x \in E} (z + (x - z)^+) = \inf_{x \in E} (z \vee x).$$

Если множество E имеет точную верхнюю границу, то, применяя доказанное к элементу $-z$ и множеству $-E$, получим с помощью предложения I из **1.2**.

$$z \wedge \sup E = -[(-z) \vee (-\sup E)] = -[(-z) \vee \\ \vee \sup(-E)] = -\sup_{x \in E} [(-z) \vee (-x)] = \sup_{x \in E} (z \wedge x).$$

Пусть x — элемент векторной решетки X. Элемент $|x| = x \vee (-x)$ называется *абсолютной величиной* данного элемента x.

VI. *Справедливы равенства* $|x| = x^+ + x^- = x^+ \vee x^-$.

В самом деле, в соответствии с предложением I из 1.2 и предложением III

$$|x| = x \vee (-x) = -x + [(2x) \vee 0] = -x + (2x)^+ =$$
$$= -x + 2x^+ = x^+ + x^-.$$

Отсюда, в частности, следует, что $|x| \geqslant 0$. Поэтому $|x| = |x| \vee 0 = (x \vee 0) \vee [(-x) \vee 0] = x^+ \vee x^-$.

Поскольку $|x| = P(x) + N(x)$ $(x \in X)$, то отображение $x \longrightarrow |x|$ $(x \in X)$ так же, как P и N, сублинейно. Более того, справедливо соотношение $|\alpha x| = |\alpha|\,|x|$ $(x \in X, \alpha \in \mathbf{R})$. Действительно, если $\alpha \leqslant 0$, то $\alpha x = -|\alpha| x$, $-\alpha x = |\alpha| x$, стало быть, $|\alpha x| = (\alpha x) \vee (-\alpha x) = (-|\alpha| x) \vee (|\alpha| x) = \big||\alpha| x\big| = |\alpha|\,|x|$. Таким образом, получаем

VII. *Если X — векторная решетка, то* (ср. (3)—(5))

$$|\alpha x_1 + \beta x_2| \leqslant |\alpha|\,|x_1| + |\beta|\,|x_2| \qquad (x_1, x_2 \in X;$$
$$\alpha, \beta \in \mathbf{R}). \tag{7}$$

Отметим еще, что для элемента x векторной решетки X соотношения $|x| = 0$ и $x = 0$ эквивалентны, поскольку из равенства $|x| = 0$ вытекают равенства $x^+ = x^- = 0$, что, в свою очередь, влечет $x = x^+ - x^- = 0$.

VIII. *Пусть* $x, u \in X$; $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. *Если* $u \geqslant 0$, $\alpha < \beta$, *то*

$$(x - \alpha u)^+ \vee (x - \beta u)^- \geqslant {}^1/_2 (\beta - \alpha) u. \tag{8}$$

В самом деле, положим $\varepsilon = {}^1/_2 (\beta - \alpha)$, $\lambda = {}^1/_2 (\alpha + \beta)$, $z = x - \lambda u$. Тогда

$$(x - \alpha u)^+ \vee (x - \beta u)^- = (z + \varepsilon u) \vee (\varepsilon u - z) \vee 0 =$$
$$= \varepsilon u + [z \vee (-z) \vee (-\varepsilon u)] = \varepsilon u + |z| \geqslant \varepsilon u.$$

В векторной решетке имеет место так называемая *теорема о сумме промежутков*.

Теорема 3(2.1). *Пусть X — векторная решетка и x, y, u, v — такие ее элементы, что $x \leqslant u$, $y \leqslant v$. Тогда*

$$[x, u] + [y, v] = [x + y, u + v]. \tag{9}$$

Доказательство. Поскольку z, $w \in X$ будет

$$[z, w] = z + [0, w - z],$$

то выполняются следующие соотношения:

$$[x, u] + [y, v] = x + y + ([0, u - x] + [0, v - y]);$$

$$[x + y, u + v] = x + y + [0, (u - x) + (v - y)].$$

Таким образом, достаточно ограничиться случаем, когда $x = y = \mathbf{0}$.

Итак, докажем равенство

$$[\mathbf{0}, u] + [\mathbf{0}, v] = [\mathbf{0}, u + v] \quad (u, v \in X;\ u, v \geqslant \mathbf{0}).$$

Очевидно включение $[\mathbf{0}, u] + [\mathbf{0}, v] \subset [\mathbf{0}, u + v]$. Для доказательства обратного включения возьмем элемент $z \in [\mathbf{0}, u + v]$ и положим $z' = z \wedge u$, $z'' = (z - u)^+$. Ясно, что $z' \in [\mathbf{0}, u]$, и так как выполняется $z'' \leqslant (u + v - u)^+ = v^+ = v$, то $z'' \in [\mathbf{0}, v]$. Кроме того, в силу предложения I из 1.2 имеем

$$z' + z'' = (z \wedge u) + [(z - u) \vee \mathbf{0}] = u + ([(z - u) \wedge \mathbf{0}] + [(z - u) \vee \mathbf{0}]) = u + (z - u) = z.$$

Тем самым доказательство (9) завершено.

1.2.2. Укажем на некоторые конструкции, приводящие к векторным решеткам.

I. *Пусть* $\{X_t\}$ $(t \in T)$ — *семейство векторных решеток. Тогда произведение* $X = \prod_{t \in T} X_t$ *также является векторной решеткой.*

Действительно, если $x \in X$, то легко проверить, что отображение $t \longrightarrow (x(t))^+$ совпадает с т. в. г. $x \vee \mathbf{0}$ в пространстве X.

Поскольку поле скаляров $\mathbf{R}$, очевидно, векторная решетка, то при любом T будет векторной решеткой и пространство $\mathbf{R}^T$ всех заданных на T вещественных функций.

Подпространство X_0 векторной решетки X, будучи, разумеется, упорядоченным векторным пространством, уже не является, вообще говоря, векторной решеткой хотя бы потому, что конус положительных элементов пространства X_0 может не быть воспроизводящим. В нашем распоряжении нет содержательных критериев того, что подпространство векторной решетки также является векторной решеткой. Укажем лишь на очевидное достаточное условие.

II. *Конечно-правильное подпространство X_0 векторной решетки X само будет векторной решеткой.*

Заметим, что при проверке конечной правильности подпространства X_0 нет необходимости убеждаться, что точные границы каждого конечного множества в X_0 входят в X. Достаточно лишь установить, что вместе с элементом x подпространство X_0 содержит и его положительную часть. Тогда для $u, v \in X_0$ будет $u \vee v = u + (v-u)^+ \in X_0$ и $u \wedge v = v - (v-u)^+ \in X_0$. Таким образом,

III. *Если подпространство X_0 векторной решетки X содержит положительную часть каждого своего элемента, то X_0 — векторная решетка (называемая обычно подрешеткой X).*

В силу сказанного будет векторной решеткой пространство $l_\infty(T)$ всех ограниченных функций, заданных на некотором множестве T. Далее, если T — топологическое пространство, то совокупность C_T всех непрерывных на T функций, рассматриваемая как подпространство векторной решетки $\mathbf{R}^T$, сама становится векторной решеткой. Если $\mathfrak{A}$ — это σ-алгебра подмножеств некоторого множества T, а $S_{T,\mathfrak{A}}$ — совокупность всех конечных измеримых (относительно σ-алгебры $\mathfrak{A}$) функций, заданных на T, то по тем же соображениям, что и выше, можно утверждать, что $S_{T,\mathfrak{A}}$ — векторная решетка.

IV. *Для того чтобы подпространство X_0 векторной решетки X было нормальным* (см. **1.3**), *необходимо и достаточно, чтобы для каждого $x \in X_0$ было $[0, |x|] \subset X_0$.*

Действительно, пусть X_0 — нормальное подпространство и $x \in X_0$. Согласно определению в X_0 существуют такие положительные элементы x_1, x_2, что $x = x_1 - x_2$. Поскольку $x_1 + x_2 \in X_0$, то $[0, x_1 + x_2] \subset X_0$. Но $|x| \leqslant x_1 + x_2$ (предложение I из **1.5**). Стало быть, $[0, |x|] \subset [0, x_1 + x_2] \subset X_0$. Обратно, пусть выполнено условие доказываемого предложения. Беря в нем в качестве x положительный элемент из X_0, убедимся, что пересечение $K_0 = K \cap X_0$ конуса K положительных элементов пространства X с подпространством X_0 — нормальный конус в K. Если теперь понимать под x произвольный элемент из

X_0 то, поскольку x^+, $x^- \in [0, |x|] \subset X_0$, элемент x может быть представлен в виде разности элементов x^+, $x^- \in K_0$. Таким образом, $X_0 = K_0 - K_0$. Подпространство X_0 нормально.

Из предложения IV, в частности, следует

V. *Если K_0 — нормально содержащийся в K конус, то множество $X_0 = \{x \in X : |x| \in K_0\}$ будет нормальным подпространством векторной решетки X.*

Действительно, если $x, y \in X_0$ и $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, то ввиду (7) $|\alpha x + \beta y| \leqslant |\alpha| |x| + |\beta| |y|$ и нормальности конуса K_0 будет $\alpha x + \beta y \in X_0$. Этим доказана линейность множества X_0. Так как, очевидно, $X_0 \cap K = K_0$, то выполнено условие предложения IV.

Заметим, что по ходу доказательства предложения IV было установлено, что положительная часть любого элемента из нормального подпространства векторной решетки принадлежит этому подпространству. Стало быть, на основании предложения III имеем

VI. *Нормальное подпространство векторной решетки является векторной решеткой.*

Пример нормального подпространства дает следующая конструкция.

Пусть X — векторная решетка. Рассмотрим множество T и произведение $\mathfrak{X} = X^T$. Через $(X^T)_\infty$ обозначим совокупность всех таких $\varphi \in \mathfrak{X}$, что семейство $\{\varphi(t)\}$ $(t \in T)$ пространства X ограничено (в X). Поскольку ограниченность этого семейства равносильна ограниченности семейства $\{|\varphi(t)|\}$ $(t \in T)$, то на основании предложения VII из **2.2** убеждаемся, что множество $(X^T)_\infty$ линейно в $\mathfrak{X}$, причем, очевидно, $(X^T)_\infty$ нормально содержится в $\mathfrak{X}$.

Если $x \in X$, то, обозначая через Δx «постоянное» отображение, сопоставляющее каждому элементу $t \in T$ один и тот же элемент x, построим погружение $x \longrightarrow \Delta x$ $(x \in X)$ данной векторной решетки X в векторную решетку $(X^T)_\infty$, которое представляет собой изоморфизм.

Возвращаясь к общему случаю, с помощью теоремы 2 докажем

VII. *Если X — векторная решетка, а X_0 — ее нормальное подпространство, то фактор-пространство $\overline{X} = X/X_0$ также будет векторной решеткой, причем канонический гомоморфизм φ векторной решетки X на фактор-пространство $\overline{X}$ сохраняет точные границы конечных множеств.*

В самом деле, если $\bar{x}\in\bar{X}$, то, выбрав $x\in\bar{x}$ и положив $\bar{x}'=\varphi(x^+)$, можем написать в силу упомянутой теоремы: $\bar{x}'=\varphi(x\vee\mathbf{0})=\varphi(x)\vee\varphi(\mathbf{0})=\bar{x}\vee\mathbf{0}=\bar{x}^+$.

I.2.3. Рассмотрим σ-алгебру $\mathfrak{A}$ подмножеств данного множества T и пусть $\mathfrak{N}$ — некоторая σ-алгебра, содержащаяся в $\mathfrak{A}$ и обладающая свойством *наследственности:* если множество $e\subset T$ таково, что существует множество $e_0\in\mathfrak{N}$, содержащее его, то $e\in\mathfrak{N}$.

В векторной решетке $S_{T,\mathfrak{A}}$ введем подпространство X_0 из функций, каждая из которых отлична от нуля лишь на некотором множестве из $\mathfrak{N}$. Нетрудно понять, что X_0 удовлетворяет критерию предложения IV из **2.2** и, следовательно, является нормальным подпространством векторной решетки $S_{T,\mathfrak{A}}$. В силу предложения VII из **2.2** фактор-пространство $S_{T,\mathfrak{A},\mathfrak{N}}=S_{T,\mathfrak{A}}/X_0$ будет векторной решеткой, которую, допуская вольность речи, будем называть *решеткой измеримых функций*. Элементами этой решетки служат классы функций, отличающихся одна от другой лишь на множествах из σ-алгебры $\mathfrak{N}$, т. е., как говорят в подобных случаях, из функций, совпадающих «почти везде».

В соответствии со сказанным в **1.3** элементы $\bar{x}\in S_{T,\mathfrak{A},\mathfrak{N}}$ положителен тогда и только тогда, когда существует функция $x\in\bar{x}$, все значения которой положительны. При этом все остальные функции класса $\bar{x}$ могут иметь строго отрицательные значения лишь на множествах из σ-алгебры $\mathfrak{N}$, т. е. они положительны «почти везде». Отсюда следует, что для элементов $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2\in S_{T,\mathfrak{A},\mathfrak{N}}$ соотношение $\bar{x}_1\leqslant\bar{x}_2$ равносильно тому, что для любых функций $x_1\in\bar{x}_1$, $x_2\in\bar{x}_2$ неравенство $x_1(t)\leqslant x_2(t)$ справедливо для всех $t\in T$ за возможным исключением t, принадлежащих некоторому множеству $e\in\mathfrak{B}$.

Отметим, что описанная ситуация возникает, в частности, если на σ-алгебре $\mathfrak{A}$ задана мера μ. Тогда под $\mathfrak{N}$ понимают совокупность всех множеств нулевой меры, т. е. таких множеств $e\subset T$, что существует содержащее e множество $e_0\in\mu^{-1}[\mathbf{0}]$. В этом случае вместо $S_{T,\mathfrak{A},\mathfrak{N}}$ пишут обычно $S_{T,\mu}$.

I.2.4. Рассмотрим векторную решетку X с конусом положительных элементов K. Через δ обозначим каноническое отношение дизъюнктности в K (см. **0.2.9**): $\delta=$

$=\{(x, y)\in K^2 : x\wedge y=0\}$. Компоненты множества K, отвечающие данному соответствию δ (см. **0.1.5**), называются *предкомпонентами* векторной решетки X (или конуса K). Совокупность $\mathfrak{C}(X)$ всех предкомпонент называется *базой* векторной решетки X. Согласно предложению I из **0.2.8** база $\mathfrak{C}(X)$, упорядоченная по включению, представляет собой полную булевскую алгебру.

Как и в **0.1.9**, для поляры $\pi_\delta(E)$ множества $E\subset K$ мы будем использовать обозначение E^d и называть множество E^d дизъюнктным дополнением множества E. Напомним, что согласно данному в **0.1.4** определению дизъюнктное дополнение E^d множества $E\subset K$ состоит из всех таких $z\in K$, что для любых $x\in E$ выполняется соотношение $x\wedge z=0$.

Так как конус K представляет собой решетку, для которой выполняется полный верхний дистрибутивный закон (предложение V из **2.1**), то к нему применимы рассмотрения пункта **0.2.10**. Наличие в K векторной структуры (точнее, структуры векторного предпространства) позволяет дополнить результаты, сформулированные в **0.2.10**.

Пусть H — предкомпонента. Поскольку H есть возрастающий фильтр в K, то H нормальное множество в K. Дистрибутивный закон обеспечивает правильность предкомпоненты H. Кроме того,

I. *Предкомпонента H представляет собой конус.*

Действительно, если $x\in H$, $\alpha\in\mathbf{R}^+$, $z\in H^d$, то, полагая $\gamma=\alpha\vee 1$, будем иметь $(\alpha x)\wedge z\leqslant(\gamma x)\wedge(\gamma z)=\gamma(x\wedge z)=0$. Поэтому если α, $\beta\in\mathbf{R}^+$, x, $y\in H$ и по-прежнему $z\in H^d$, то, используя дистрибутивный закон, при $\lambda=\alpha+\beta$ будем иметь

$$(\alpha x+\beta y)\wedge z\leqslant[\lambda(x\vee y)]\wedge z=[(\lambda x)\wedge z]\vee[(\lambda y)\wedge z]=0.$$

Таким образом, $\alpha x+\beta y\in H^{dd}$. Но H — предкомпонента, так что $H^{dd}=H$.

С предкомпонентой H свяжем, как и в **0.2.10**, отображение $\Phi_H : x\to[0, x]\cap H$ $(x\in K)$ конуса K в множество $\mathfrak{F}$ всех возрастающих фильтров в K. Отображение Φ_H обладает в известном смысле свойством предлинейности.

II. *Если x_1, $x_2\in K$, то имеет место равенство*

$$\Phi_H(x_1+x_2)=\Phi_H(x_1)+\Phi_H(x_2). \tag{10}$$

Если $x \in K$, $\alpha \in \mathbf{R}^+$, то выполняется

$$\Phi_H(\alpha x) = \alpha \Phi_H(x). \tag{11}$$

В самом деле, очевидно, справедливы соотношения

$$\Phi_H(x_1) + \Phi_H(x_2) = ([0, x_1] \cap H) + \\ + ([0, x_2] \cap H) \subset [0, x_1 + x_2] \cap H = \Phi_H(x_1 + x_2).$$

Обратно, если $z \in \Phi_H(x_1 + x_2) = [0, x_1 + x_2] \cap H$, то на основании теоремы о сумме промежутков элемент z можно представить в виде суммы: $z = z_1 + z_2$, где $z_i \in [0, x_i]$ $(i = 1, 2)$. Поскольку $z_i \leqslant z$ $(i = 1, 2)$, а предкомпонента H — нормальна, то $z_1, z_2 \in H$, так что $z = z_1 + z_2 \in \in ([0, x_1] \cap H) + ([0, x_2] \cap H) = \Phi_H(x_1) + \Phi_H(x_2)$. Вместе с предыдущим это приводит к равенству (10).

Если скаляр α строго положителен, то

$$\Phi_H(\alpha x) = [0, \alpha x] \cap H = (\alpha [0, x]) \cap (\alpha H) = \\ = \alpha ([0, x] \cap H) = \alpha \Phi_H(x).$$

При $\alpha = 0$ равенство (11) выполняется тривиальным образом.

Обозначим через M множество всех $x \in K$, которые имеют каноническую проекцию $\mathrm{Pr}_H x$ на данную предкомпоненту H.

III. *Множество M совпадает с конусом $H + H^d$. При этом*

$$\mathrm{Pr}_H(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha \mathrm{Pr}_H x_1 + \\ + \beta \mathrm{Pr}_H x_2 \; (x_1, x_2 \in M;\ \alpha, \beta \in \mathbf{R}^+). \tag{12}$$

Действительно, докажем, что множество M — конус. Возьмем $x_1, x_2 \in M$, α, $\beta \in \mathbf{R}^+$ и положим $x = \alpha x_1 + \beta x_2$. Согласно (10) и (11) и на основании теоремы о сумме промежутков

$$\Phi_H(x) = \alpha \Phi_H(x_1) + \beta \Phi_H(x_2) = \alpha [0, \mathrm{Pr}_H x_1] + \\ + \beta [0, \mathrm{Pr}_H x_2] = [0, \alpha \mathrm{Pr}_H x_1 + \beta \mathrm{Pr}_H x_2].$$

Написанное равенство означает, что элемент $\alpha \mathrm{Pr}_H x_1 + \beta \mathrm{Pr}_H x_2$ служит канонической проекцией элемента x, так что $x \in M$ и справедливо равенство (12).

Как отмечалось в **0.2.10**, H, $H^d \subset M$. Поэтому и $H+H^d \subset M$. Рассмотрим элемент $x \in M$. Принимая $x' = \mathrm{Pr}_H x$, $x'' = x - x'$ и учитывая, что $x' \in H$, можем написать в соответствии с (10):

$$\Phi_H(x) = [0, x'] = \Phi_H(x') + \\ + \Phi_H(x'') = [0, x'] + \Phi_H(x'').$$

Это приводит к равенству $\Phi_H(x'') = \{0\}$. Таким образом, существует $\mathrm{Pr}_H x'' = 0$, а это, в свою очередь, означает (см. **0.2.10**), что $x'' \in H^d$. Следовательно, $x = x' + x'' \in H + + H^d$.

Предложение III приводит к следующему результату.

IV. *Дизъюнктный проектор P_H на предкомпоненту H* (см. **0.2.10**) *существует тогда и только тогда, когда $H+H^d = K$.*

Высказанное утверждение позволяет уточнить предложение VI из **0.2.10**.

V. *Совокупность $\mathfrak{C}^0(X)$ всех тех предкомпонент, на которые существует дизъюнктный проектор, представляет собой булевскую алгебру — подалгебру базы $\mathfrak{C}(X)$ векторной решетки X.*

Действительно, в силу предложения IV предкомпонента H и ее дизъюнктное дополнение H^d входят или нет в совокупность $\mathfrak{C}^0(X)$ одновременно. На основании цитированного предложения VI из **0.2.10**, если H_1, $H_2 \in \mathfrak{C}^0(X)$, то и $H_1 \cap H_2 \in \mathfrak{C}^0(X)$. А тогда и $H_1 \vee H_2 = = [H_1^d \cap H_2^d]^d \in \mathfrak{C}^0(X)$.

Из предложения III получаем

VI. *Дизъюнктный проектор P_H на предкомпоненту $H \in \mathfrak{C}^0(X)$ — предлинейный оператор.*

Выясним связь между базами $\mathfrak{C}(X)$ векторной решетки X и $\mathfrak{C}(X_0)$ ее нормального подпространства X_0. Пусть K и $K_0 = K \cap X_0$ — конусы положительных элементов векторных решеток X и X_0 соответственно. Обозначая через δ_0 отношение дизъюнктности в K_0 и через E^{d_0} поляру $\pi_{\delta_0}(E)$ множества $E \subset K_0$, докажем, что для нормального в K множества E выполняется

$$(E \cap K_0)^{d_0} = E^d \cap K_0. \tag{13}$$

Действительно, для любого множества $A \subset K_0$ будет, очевидно, $A^{d_0} = A^d \cap K_0$. Поэтому $(E \cap K_0)^{d_0} = (E \cap K_0)^d \cap K_0 \supset$

$\supset E^d \cap K_0$. Если x — такой элемент конуса K_0, который не входит в E^d, то найдется $y \in E$ так, что $z = x \wedge \wedge y > 0$. Ввиду нормальности множеств E и K_0 элемент z входит в пересечение $E \cap K_0$, а так как $x \wedge z \in z > 0$, то $x \overline{\in} (E \cap K_0)^{d_0}$.

VII. *Если H — предкомпонента векторной решетки X, то пересечение $H \cap K_0$ — предкомпонента векторной решетки X_0. Обратно, всякая предкомпонента L векторной решетки X_0 представима в виде $L = L^{dd} \cap X_0$.*

В самом деле, поскольку $E = H^d$ — предкомпонента и, стало быть, нормальное множество в K, на основании (13) можно написать: $H \cap K_0 = (H^d \cap K_0)^{d_0}$, откуда следует, что $H \cap K_0 \in \mathfrak{E}(X_0)$. Далее, снова с помощью (13) $L^{dd} \cap K_0 = (L^d \cap K_0)^{d_0} = L^{d_0 d_0} = L$.

Обозначая через H_0 предкомпоненту векторной решетки X, порожденную конусом $K_0: H_0 = K_0^{dd}$, рассмотрим предкомпоненту $H \in \mathfrak{E}(X)$, содержащуюся в H_0. Докажем, что $(H \cap K_0)^{dd} = H$. Положим $L = H \cap K_0$ и $H_1 = H \cap \cap L^d$. Если $x \in H_1$, то, поскольку $H_1 \cap K_0 = H \cap L^d \cap K_0 = = L \cap L^d = \{0\}$, ввиду нормальности конуса K_0 должно быть $x \in K_0^d$. А так как одновременно $x \in H \subset H_0 = K_0^{dd}$, то $x = 0$. Учитывая, что $H \supset L^{dd}$, получаем отсюда $H = L^{dd}$.

Привлекая предложение VII, выводим на основании сказанного выше

VIII. *Отображение $H \to H \cap K_0$ $(H \in \mathfrak{E}_0(X) = \{H \in \in \mathfrak{E}(X) : H \subset H_0\})$ является изоморфизмом подалгебры $\mathfrak{E}_0(X)$ на базу $\mathfrak{E}(X_0)$ векторной решетки X_0.*

В частности, если $H_0 = K_0^{dd} = K$ — в этом случае подпространство X_0 называется *фундаментом* векторной решетки X,—

IX. *Базы $\mathfrak{E}(X)$ и $\mathfrak{E}(X_0)$ векторной решетки X и ее фундамента X_0 изоморфны.*

1.2.5. Иногда бывает удобно вместо предкомпоненты векторной решетки X говорить о более «полной» конструкции, в образовании которой участвуют все элементы векторной решетки X, а не только конуса K ее положительных элементов.

Обозначим через f отображение $x \to |x|$ $(x \in X)$ векторной решетки X на конус K и введем соответствие $\Delta = f^{-1} \circ \delta \circ f$ из X в X. Согласно предложению I из

0.1.9. Δ — отношение дизъюнктности в X. Применительно к данной ситуации дизъюнктность элементов $x, y \in X$ означает, что $|x| \wedge |y| = 0$. Поляру $\pi_\Delta(E)$ множества $E \subset X$ будем обозначать через E^Δ и называть (полным) *дизъюнктным дополнением* множества E. Будем называть Δ-компоненты множества $E \subset X$ просто *компонентами* векторной решетки X [9].

Тот факт, что множество $S \subset X$ является компонентой, означает, таким образом, что $S^{\Delta\Delta} = S$. В силу предложения I из **0.1.8** множество $S \subset X$ будет компонентой тогда и только тогда, когда существует такая предкомпонента H, что $S = f^{-1}[H]$. Это обстоятельство позволяет отождествить базу $\mathfrak{C}(X)$ векторной решетки X с совокупностью всех ее компонент.

С помощью предложения V из **2.2** можно установить связи между предкомпонентами и компонентами в терминах векторной структуры.

I. *Для того чтобы множество $S \subset X$ было компонентой, необходимо и достаточно, чтобы S было таким нормальным подпространством, что пересечение $S \cap K$ — предкомпонента. При этом $S = f^{-1}[H]$.*

В самом деле, пусть S — компонента. Обозначим через H такую предкомпоненту, что $S = f^{-1}[H]$. Согласно предложению V из **2.2** S — нормальное подпространство, причем $S \cap K = H$.

Достаточность также доказывается с помощью предложения V из **2.2**: если S — нормальное подпространство и пересечение $H = S \cap K$ — предкомпонента, то в силу цитированного предложения $f^{-1}[H] = S$.

Нетрудно понять, что любая компонента правильна. Действительно, рассмотрим множество E, содержащееся в компоненте S. Предположим, что множество E обладает точной верхней границей: $v = \sup E$. Согласно III из **2.1** множество E^+ всех элементов вида x^+ (с $x \in E$) будет тогда иметь точную верхнюю границу v^+, а множество E^- всех элементов вида x^- ($x \in E$) — точную нижнюю границу v^-. Множества E^+, E^- содержатся в пересечении $H = S \cap K$, которое в силу предложения I является предкомпонентой. Следовательно, ввиду пра-

---

[9] Именно желанием сохранить этот традиционный термин и обусловлено введение термина «предкомпонента», хотя понятие предкомпоненты оказывается более удобным.

вильности и нормальности предкомпоненты H будет $v^+, v^- \in H$, а тогда $v = v^+ - v^- \in H - H = S$.

Рассмотрим компоненту S и предположим, что на предкомпоненту $H = S \cap K$ существует дизъюнктный проектор P_H. Поскольку P_H — предлинейный оператор, а конус K — воспроизводящий, то согласно предложению II из 1.1 существует единственное линейное распространение U_S проектора P_H, определенное на всем X. Оператор U_S также называется (*дизъюнктным*) *проектором* (но уже *на компоненту* S).

Ввиду того, что для $x \in X$ имеем $U_S(x) = U_S(x^+) - U_S(x^-) = P_H(x^+) - P_H(x^-)$, то, как и в **0.2.10**,

$$S = \{x \in X : U_S(x) = x\}; \quad S^\Delta = \{x \in X : U_S(x) = 0\}, \quad (14)$$

Поскольку $U_S[X] = U_S[K - K] \subset P_H[K] - P_H[K] = H - H = S$, то из (14) вытекает *идемпотентность* оператора $U_S : U_S^2 = U_S$.

Привлекая результат предложения IV из **0.2.10**, получаем

II. *Если существует дизъюнктный проектор U_S на компоненту S, то он сохраняет точные границы.*

В самом деле, пусть $E \subset X$ — множество, имеющее точную верхнюю границу. Положим $v = \sup E$. Поскольку в силу предложения I из **1.2** множество $E_0 = v - E$ имеет точную нижнюю границу, равную $v - v = 0$, то, понимая под H предкомпоненту $S \cap K$, а под P_H дизъюнктный проектор на нее — сужение (на K) проектора U_S, на основании предложения IV из **0.2.10** будем иметь

$$0 = U_S(0) = P_H(\inf E_0) = \inf P_H[E_0] = \\ = \inf(U_S(v) - U_S[E]),$$

откуда и получаем, что существует точная верхняя граница образа $U_S[E]$, равная $U_S(v)$.

Сохранение проектором U_S точных нижних границ доказывается теперь с помощью упоминавшегося уже предложения I из **1.2**.

Отметим, что предложение II дает, в частности, для $x \in X$

$$[U_S(x)]^+ = U_S(x^+), \ [U_S(x)]^- = U_S(x^-), \ |U_S(x)| = \\ = U_S(|x|). \quad (15)$$

Так как конус K — воспроизводящий, то в соответствии со сказанным в 1.4 пространство $L(X)=L(X, X)$ является упорядоченным векторным пространством. В терминах указанной упорядоченности возможна простая характеристика дизъюнктных проекторов на компоненты.

Теорема 4(2.1). *Для того чтобы линейный оператор U, отображающий векторную решетку X в себя, был дизъюнктным проектором на некоторую компоненту, необходимо и достаточно, чтобы он был идемпотентен: $U^2=U$ и удовлетворял соотношению $0\leqslant U\leqslant I_X$, где I_X — оператор, осуществляющий тождественное отображение X на себя.*

Доказательство. В нем нуждается лишь достаточность условий. Рассмотрим идемпотентный линейный оператор U такой, что $0\leqslant U\leqslant I_X$. Введем еще оператор $U'=I_X-U$. Ясно, что он также удовлетворяет обоим условиям теоремы. Пусть P и P' — сужения оператора U и соответственно U' на конус K положительных элементов решетки X. Положим

$$H=P'^{-1}[0]=\{x\in K : P(x)=x\},\ H'=P^{-1}[0]=$$
$$=\{x\in K : P'(x)=x\}.$$

Множества H и H' являются конусами, причем ввиду положительности операторов U и U' — нормальными. Вследствие идемпотентности оператора P для $x\in K$ будет $P(P(x))=P(x)$, так что $P(x)\in H$. Точно так же $P'(x)\in H'$. Если $x\in H$, $y\in H'$, то $x\wedge y\in H\cap H'$. Стало быть, $x\wedge y=P(x\wedge y)+P'(x\wedge y)=0$. Тем самым $H\subset H'^d$. Возьмем элемент $z\in H'^d$ и примем $u=P(z)$, $v=P'(z)$. Поскольку $v\leqslant z$, то $v\in H'^d$. Но одновременно $v=P'(z)\in \in H'$. Поэтому $v=0$ и $z=u=P(z)$, т. е. $z\in H$. Этим доказано равенство $H=H'^d$, из которого вытекает, что H — предкомпонента. Если $x\in K$, то ввиду того, что $P(x)\leqslant x$, вследствие нормальности предкомпоненты и положительности оператора U можем записать:

$$[0, x]\cap H = P[[0, x]\cap H]\subset P[[0, x]]\subset$$
$$\subset [0, P(x)]\subset [0, x]\cap H.$$

Таким образом, для каждого $x\in K$ элемент $P(x)$ служит канонической проекцией элемента x на предкомпоненту

H, т. е. $P(x)=\mathrm{Pr}_H x$, а это означает, что P является дизъюнктным проектором на H. А тогда U, будучи распространением проектора P, есть дизъюнктный проектор на компоненту $S=H-H$.

1.2.6. Нормальные подпространства векторной решетки представляют собой достаточно тонкий инструмент для изучения данной векторной решетки.

Рассмотрим векторную решетку X с конусом K положительных элементов. Обозначим через $\mathfrak{M}$ совокупность всех нормальных подпространств векторной решетки X, а через $\mathfrak{N}$ — множество всех *нормальных конусов*, т. е. конусов, нормально содержащихся в конусе K. Если снабдить обе совокупности $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ упорядоченностью по включению, то согласно определению и предложению II из **1.3** отображение $M \longrightarrow M \cap K$ $(M \in \mathfrak{M})$ и отображение $N \longrightarrow N-N$ $(N \in \mathfrak{N})$ обратны по отношению друг к другу, так что указанные множества изоморфны. Имея в виду это обстоятельство, изучение множества $\mathfrak{M}$ можно заменить изучением множества $\mathfrak{N}$, элементы которого — нормальные конусы — имеют несколько более простую структуру.

I. *Совокупность $\mathfrak{N}$, упорядоченная по включению, представляет собой полную решетку.*

Для доказательства достаточно отметить, что пересечение любого множества нормальных конусов само будет нормальным конусом[10], который и будет точной нижней границей данного множества нормальных конусов.

Сложнее обстоит дело с описанием точной верхней границы множества нормальных конусов. Остановимся на двух случаях.

II. *Если N_1, $N_2 \in \mathfrak{N}$*, то $N_1 \vee N_2 = N_1 + N_2$.

Действительно, как в свое время было проверено, множество N_1+N_2 представляет собой конус (содержащийся, очевидно, в конусе K). Убедимся, что этот конус нормальный. Пусть элементы $x \in N_1+N_2$ и $y \in K$ таковы, что $y \leqslant x$. Так как элемент x допускает представление в виде $x=x_1+x_2$ с $x_1 \in N_1$, $x_2 \in N_2$, то согласно теореме 3 найдутся такие элементы $y_i \in [0, x_i]$ $(i=1, 2)$, что $y=y_1+y_2$. Ввиду нормальности конусов N_1 и N_2 будет

[10]) При этом, как всегда в подобных случаях, под пересечением пустого множества подмножества множества K понимается само множество K.

$y_1 \in N_1$, $y_2 \in N_2$ и, стало быть, $y = y_1 + y_2 \in N_1 + N_2$. Так как $N_1 + N_2 \supset N_1$, N_2, то $N_1 + N_2 \supset N_1 \vee N_2$. Обратное включение вытекает из того, что множество $N_1 + N_2$ является наименьшим конусом, содержащим конусы N_1 и N_2.

Точную верхнюю границу $N_1 \vee N_2$ конусов N_1 и N_2 можно описать и по-другому.

III. *Если N_1, N_2 — нормальные конусы, то нормальный конус $N_1 \vee N_2$ состоит из всех элементов вида $x_1 \vee x_2$, где $x_1 \in N_1$, $x_2 \in N_2$.*

В самом деле, пусть $x_1 \in N_1$, $x_2 \in N_2$. Поскольку $x_1 \vee x_2 \leqslant x_1 + x_2 \in N_1 + N_2 = N_1 \vee N_2$, то и $x_1 \vee x_2 \in N_1 \vee N_2$. Если $z \in N_1 + N_2$, то, представляя элемент z в виде $z = z_1 + z_2$ с $z_1 \in N_1$, $z_2 \in N_2$ и обозначая $u = z_1 \wedge z_2$, получим $z = (z_1 \vee z_2) + u = (z_1 + u) \vee (z_2 + u)$, и остается заметить, что в силу нормальности рассматриваемых конусов $u \in N_1 \cap N_2$, так что $x_1 = z_1 + u \in N_1$, $x_2 = z_2 + u \in N_2$.

IV. *Если множество $\mathfrak{A}$ нормальных конусов фильтруется по возрастанию, то $\sup \mathfrak{A} = \bigcup_{N \in \mathfrak{A}} N$.*

Доказательство очевидно.

Рассмотрим элемент $x \in K$. Если для элемента $y \in X$ существует такой скаляр α, что $|y| \leqslant \alpha x$, то говорят, что элемент y *ограничен* относительно элемента x. Совокупность N_x всех положительных элементов, ограниченных относительно данного элемента x, представляет собой, очевидно, нормальный конус.

V. *Отображение $x \to N_x$ $(x \in K)$ конуса K в множество $\mathfrak{N}$ сохраняет точные границы конечных множеств.*

Действительно, достаточно проверить, что

$$N_{x_1 \wedge x_2} = N_{x_1} \cap N_{x_2}; \quad N_{x_1 \vee x_2} = N_{x_1} \vee N_{x_2} \quad (x_1, x_2 \in K). \tag{16}$$

Первое из этих соотношений не нуждается в проверке. Для вывода второго отметим сначала, что ввиду соотношения $x_1 \vee x_2 \leqslant x_1 + x_2 \leqslant 2(x_1 \vee x_2)$ конусы $N_{x_1 \vee x_2}$ и $N_{x_1 + x_2}$ совпадают. Взяв $z \in N_{x_1 \vee x_2} = N_{x_1 + x_2}$ и найдя скаляр α так, чтобы было $z \leqslant \alpha(x_1 + x_2)$, с помощью теоремы 3 подберем элементы $z_1, z_2 \in K$, удовлетворяющие условиям: $z_1 + z_2 = z$, $z_1 \leqslant \alpha x_1$, $z_2 \leqslant \alpha x_2$. Поскольку $z_i \in N_{x_i}$ $(i = 1, 2)$, то $z \in N_{x_1} + N_{x_2} = N_{x_1} \vee N_{x_2}$. Таким образом, $N_{x_1 \vee x_2} \subset N_{x_1} \vee N_{x_2}$. Обратное включение не вызывает сомнений.

Из доказанного предложения вытекает, что совокупность всех нормальных конусов вида N_x (с $x \in K$) образует решетку, «плотную» в $\mathfrak{N}$ в том смысле, что в силу предложения IV для любого нормального конуса N будет $N = \sup_{x\in N} N_x$.

1.2.7. Ввиду указанной в **2.6** «полноты» в множестве $\mathfrak{N}$ совокупности всех нормальных конусов вида $N_x (x\in K)$ эти последние могут играть заметную роль в изучении всего множества $\mathfrak{N}$. Если фиксировать положительный элемент x векторной решетки X и рассматривать как независимый объект нормальный конус N_x или, лучше, порожденное им нормальное подпространство $N_x - N_x$, то мы придем к следующему определению. Векторная решетка X называется *векторной решеткой ограниченных элементов*, если в X существует положительный элемент $\mathbf{1}$, относительно которого ограничен любой элемент из X. Последнее означает, что для каждого $x\in X$ можно указать такой скаляр $\alpha>0$, что $|x|\leqslant\alpha\mathbf{1}$. При этом элемент $\mathbf{1}$ называется *сильной единицей* или просто *единицей*, если неполное название не ведет к недоразумениям.

В обозначениях предыдущего пункта можно, как легко видеть, данное определение высказать так: X — векторная решетка ограниченных элементов (с единицей $\mathbf{1}$), если нормальный конус $N_{\mathbf{1}}$ совпадает с конусом K положительных элементов.

I. *Пусть X — векторная решетка ограниченных элементов (с единицей $\mathbf{1}$). Отображение $p: x \to \inf\{\alpha\in \mathbf{R} : |x|\leqslant\alpha\mathbf{1}\}$ $(x\in X)$ является полунормой в X.*

Действительно, обозначая $A_x = \{\alpha\in\mathbf{R} : |x|\leqslant\alpha\mathbf{1}\}$ $(x\in X)$, для $x, y\in X$; $\lambda, \mu\in\mathbf{R}$ можем написать в силу предложения VII из **2.1**: $A_{\lambda x+\mu y}\subset|\lambda|A_x+|\mu|A_y$, так что

$$p(\lambda x+\mu y) = \inf A_{\lambda x+\mu y}\leqslant|\lambda|\inf A_x+|\mu|\inf A_y = |\lambda|p(x)+ \\ +|\mu|p(y).$$

Полунорма p называется *канонической полунормой* данной векторной решетки ограниченных элементов, отвечающей единице $\mathbf{1}$. Желая подчеркнуть связь полунормы p с единицей $\mathbf{1}$, мы будем иногда писать $p_{\mathbf{1}}$ вместо p.

Элемент x векторной решетки X называется *неархимедовым*, если существует такой элемент $u\in X$, что $|x|\leqslant\alpha u$ для любого строго положительного скаляра α. Векторная решетка называется *архимедовой*, если, кроме нулевого, она не имеет неархимедовых элементов.

В случае, когда X — векторная решетка ограниченных элементов, множество всех неархимедовых элементов совпадает с ядром $p^{-1}[0]$ канонической полунормы, так что архимедовость решетки X равносильна тому, что полунорма p является нормой.

II. *Если X — архимедова векторная решетка ограниченных элементов (с единицей* $\mathbf{1}$), *то* $|x| \leqslant p(x)\,\mathbf{1}$ *для любого* $x \in X$.

В самом деле, так как для любых $x \in X$ и $\varepsilon > 0$ будет $|x| \leqslant (p(x)+\varepsilon)\,\mathbf{1}$, то $|x| - p(x)\,\mathbf{1} \leqslant \varepsilon\mathbf{1}$ и, следовательно, $(|x| - p(x)\mathbf{1})^+ \leqslant \varepsilon\mathbf{1}$. Это значит, что $p((|x|-p(x)\mathbf{1})^+) = 0$, т. е. по условию $(|x| - p(x)\mathbf{1})^+ = \mathbf{0}$, что и нужно.

III. *Если X_0 — нормальное подпространство векторной решетки X ограниченных элементов (с единицей* $\mathbf{1}$), *то фактор-пространство $\overline{X} = X/X_0$ также будет векторной решеткой ограниченных элементов. При этом за единицу в фактор-пространстве $\overline{X}$ можно принять канонический образ $\overline{\mathbf{1}}$ единицы* $\mathbf{1}$. *Канонические полунормы $\bar{p}$ и p фактор-пространства $\overline{X}$ и данной векторной решетки X соответственно связаны друг с другом соотношением* $\bar{p}(\bar{x}) = \inf p[\bar{x}]$ $(\bar{x} \in \overline{X})$.

В доказательстве нуждается лишь соотношение, связывающее полунормы $\bar{p}$ и p. Пусть $\bar{x} \in \overline{X}$ и $x \in \bar{x}$. Если скаляр α таков, что $|x| \leqslant \alpha\mathbf{1}$, то в силу теоремы 2 $|\bar{x}| \leqslant \alpha\overline{\mathbf{1}}$. Отсюда следует, что $\bar{p}(\bar{x}) \leqslant p(x)$, так что $\bar{p}(\bar{x}) \leqslant \inf p[\bar{x}]$.

Доказывая противоположное неравенство, допустим сначала, что $\bar{x}$ — положительный элемент фактор-пространства $\overline{X}$. Если под α понимать такой скаляр, что $\bar{x} \leqslant \alpha\overline{\mathbf{1}}$, то можно найти элемент $x \in \bar{x}$ так, что $x \leqslant \alpha\mathbf{1}$. Поскольку ввиду положительности элемента $\bar{x}$ будет $x^+ \in \bar{x}$ и $x^+ \leqslant \alpha\mathbf{1}$, то можно считать найденный элемент x положительным. Но тогда $\inf p[\bar{x}] \leqslant p(x) \leqslant \alpha$ и, стало быть, $\inf p[\bar{x}] \leqslant \bar{p}(\bar{x})$. Рассмотрим теперь случай произвольного $\bar{x} \in \overline{X}$. В соответствии с доказанным, каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, можно указать такие положительные элементы $x' \in \bar{x}^+$ и $x'' \in \bar{x}^-$, что $p(x') \leqslant \bar{p}(\bar{x}^+) + \varepsilon$, $p(x'') \leqslant \bar{p}(\bar{x}^-) + \varepsilon$. Элемент $x = x' - x''$ входит в класс $\bar{x}$. Следовательно, $x^+ \in \bar{x}^+$, $x^- \in \bar{x}^-$. Учитывая, что $x^+ \leqslant x'$, $x^- \leqslant x''$ (предложение II из **2.1**), будем иметь

$$\inf p[\bar{x}] \leqslant p(x) = p(x^+) \vee p(x^-) \leqslant p(x') \vee p(x'') \leqslant$$
$$\leqslant (\bar{p}(\bar{x}^+) + \varepsilon) \vee (\bar{p}(\bar{x}^-) + \varepsilon) = \varepsilon + (\bar{p}(\bar{x}^+) \vee \bar{p}(\bar{x}^-)) =$$
$$= \varepsilon + \bar{p}(\bar{x}),$$

откуда и следует нужное неравенство.

Принимая в предложении III $X_0=p^{-1}[0]$, получим в качестве $\bar{p}$ снижение полунормы p на $\overline{X}$, которое, как известно, является нормой. Следовательно, фактор-пространство $\overline{X}$ в этом случае архимедово.

Займемся теперь топологическими вопросами, связанными с множеством $\mathfrak{N}$ всех нормальных конусов векторной решетки X ограниченных элементов (с единицей 1). Сохраняя обозначения предыдущего пункта, заметим прежде всего, что в рассматриваемом случае каждый *собственный* (т. е. отличный от конуса K положительных элементов) нормальный конус N характеризуется соотношением $1\overline{\in}N$, и, следовательно, на основании предложения IV из **2.6** совокупность $\mathfrak{N}_0$ всех собственных нормальных конусов индуктивна по возрастанию — удовлетворяет условиям леммы Цорна. В частности, каждый возрастающий ультрафильтр χ в $\mathfrak{N}$ имеет наибольший элемент — максимальный элемент множества $\mathfrak{N}_0$. Из этих же соображений вытекает, что совокупность Q всех максимальных элементов множества $\mathfrak{N}_0$ образует верхнее основание этого множества.

Убедимся, что для Q удовлетворены условия теоремы 5(2.0). Более того, докажем, что, каков бы ни был нормальный конус N_0, множество $D(N_0)=\{N\in\mathfrak{N}: N\vee N_0=K\}$ фильтруется по убыванию. Действительно, пусть N_1, N_2 — такие нормальные конуса, что $N_1\vee N_0=N_2\vee N_0=K$. Возьмем какой либо элемент $z\in K$. Согласно предложению III из **2.6** найдутся такие элементы $x_i\in N_i$ и $y_i\in N_0$ $(i=1,2)$, что $x_1\vee y_1=x_2\vee y_2=z$. Ввиду дистрибутивности векторной решетки (предложение V из **2.1**)

$$z=(x_1\vee y_1)\wedge(x_2\vee y_2)=(x_1\wedge x_2)\vee[(x_1\wedge y_2)\vee(x_2\wedge y_1)\vee \vee(y_1\wedge y_2)]=u\vee v,$$

где $u=x_1\wedge x_2$, $v=(x_1\wedge y_2)\vee(x_2\wedge y_1)\vee(y_1\wedge y_2)$. Поскольку $u\in N_1\wedge N_2$, $v\in N_0$, то вновь на основании предложения III из **2.6** $z=u\vee v\in(N_1\wedge N_2)\vee N_0$, так что $(N_1\wedge N_2)\vee \vee N_0=K$, т. е. $N_1\wedge N_2\in D(N_0)$.

Согласно теореме 5 (2.0) в множестве Q может быть введена отделимая топология так, что совокупность всех множеств вида $F_N=\{q\in Q: q\supset N\}$ (с $N\in\mathfrak{N}$) образует базис совокупности $\mathfrak{F}(Q)$ всех замкнутых множеств пространства Q. Основываясь на предложении IV из **2.6**, нетрудно показать, во-первых, что пространство Q компактно и, во-вторых, что множествами вида F_N ($N \in \mathfrak{N}$) исчерпываются все замкнутые множества пространства Q. Компактное пространство Q будем называть *гельфандовским компактом* данной векторной решетки X ограниченных элементов [11]. Напомним (см. **0.2.5**), что если $N_1, N_2 \in \mathfrak{N}$ и $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{N}$, то

$$F_{N_1 \wedge N_2} = F_{N_1} \cup F_{N_2}; \quad F_{\sup \mathfrak{A}} = \bigcap_{N \in \mathfrak{A}} F_N. \tag{17}$$

Условимся еще писать $F_{[x]}$ вместо F_N, если $N = N_x (x \in K)$.

IV. *Если* $N \in \mathfrak{N}$, *то* $F_N = Q$ *тогда и только тогда, когда* $N \subset N_0 = K \cap p^{-1}[0]$, *где* p — *каноническая полунорма в* X.

В самом деле, возьмем $x \in N_0$. Если $x \in q$ при некотором $q \in Q$, то $N_x \vee q = K$, так что найдутся такие элементы $y \in N_x$ и $z \in q$, что $y + z = \mathbf{1}$ (предложение II из **2.6**). Поскольку $y \in N_x \subset N_0$, то $y \leqslant {}^1/_2 \mathbf{1}$ и, следовательно, $z = \mathbf{1} - y \geqslant {}^1/_2 \mathbf{1}$. Но тогда $q \supset N_z = K$, что невозможно. Таким образом, нормальный конус N_0 содержится в любом $q \in Q$, т. е. $F_{N_0} = Q$.

Обратно, пусть $F_N = Q$, т. е. $N \subset \bigcap_{q \in Q} q = \inf Q$. Возьмем $x \in N$ и положим $p(x) = \nu$. Предполагая $\nu > 0$, выберем из промежутка $(0, \nu)$ число ε. Принимая в соотношении (8) (см. **2.6**) $\alpha = {}^1/_2 \varepsilon$, $\beta = \varepsilon$ и воспользовавшись соотношениями (16) и (17), можем написать $F_{[(x - \varepsilon \mathbf{1})_-]} \cap F_{[(x - {}^1/_2 \varepsilon \mathbf{1})_+]} = F_K = \varnothing$. Но поскольку $(x - {}^1/_2 \varepsilon \mathbf{1})^+ \leqslant x$, то $F_{[(x - {}^1/_2 \varepsilon \mathbf{1})_+]} \supset F_N = Q$ и, значит, $F_{[(x - {}^1/_2 \varepsilon \mathbf{1})_+]} = Q$. Таким образом, предыдущее равенство дает $F_{[(x - \varepsilon \mathbf{1})_-]} = \varnothing$, $N_{(x - \varepsilon \mathbf{1})_-} = K$. Отсюда следует, что найдется такое строго положительное число α, что $(x - \varepsilon \mathbf{1})^- \geqslant \alpha \mathbf{1}$. Учитывая, что $x \leqslant (\nu + {}^1/_2 \alpha) \mathbf{1}$ и, следовательно, $(x - \varepsilon \mathbf{1})^+ \leqslant (\nu - \varepsilon + {}^1/_2 \alpha) \mathbf{1}$, получим $x - \varepsilon \mathbf{1} = (x - \varepsilon \mathbf{1})^+ - (x - \varepsilon \mathbf{1})^- \leqslant (\nu - \varepsilon + {}^1/_2 \alpha) \mathbf{1} - \alpha \mathbf{1} = (\nu - \varepsilon - {}^1/_2 \alpha) \mathbf{1}$, т. е. $x \leqslant (\nu - {}^1/_2 \alpha) \mathbf{1}$, что противоречит равенству $p(x) = \nu$.

---

[11] Как нетрудно понять, доказательство того факта, что совокупность $D(N_0)$ фильтруется по убыванию, справедливо и для произвольной векторной решетки X. Тем самым множество $\mathfrak{N}$ удовлетворяет условиям теоремы 6(2.0), и, следовательно, можно говорить о стоуновском компакте множества $\mathfrak{N}$. Однако в общем случае указанный компакт слишком беден элементами и не может поэтому играть заметной роли в изучении данной векторной решетки. Содержательное распространение понятия гельфандовского компакта на произвольные векторные решетки требует довольно сложных построений, выходящих из рамки настоящей книги.

Основной топологической характеристикой компакта Q служит следующее предложение.

V. *Пусть N — нормальный конус, ε — строго положительное вещественное число, $x \in N$ и $u = (x - \varepsilon\mathbf{1})^+$. Множество $F_{[u]}$ является окрестностью множества F_N.*

• В самом деле, поскольку $(x - {}^1/_2\varepsilon\mathbf{1})^- \wedge u \leqslant (x - {}^1/_2\varepsilon\mathbf{1})^- \wedge (x - {}^1/_2\varepsilon\mathbf{1})^+ = \mathbf{0}$, то в силу (16) и (17) $F_{[u]} \cup F_{[(x-1/2\varepsilon\mathbf{1})^-]} = F_{[\mathbf{0}]} = Q$, так что $F_{[u]}$ содержит открытое множество $(F_{[(x-1/2\varepsilon\mathbf{1})^-]})'$. Принимая в соотношении (8) $\alpha = 0$, $\beta = {}^1/_2\varepsilon$, в том же порядке идей установим, что $F_{[x]} \cap F_{[(x_1-1/2\varepsilon\mathbf{1})^-]} = F_K = \varnothing$. Следовательно, $F_N \subset F_{[x]} \subset (F_{[(x-1/2\varepsilon\mathbf{1})^-]})'$. Этим и завершается доказательство.

Докажем теперь хаусдорфовость компакта Q. Она вытекает из следующего утверждения.

VI. *Пусть N — нормальный конус и $F = F_N$. Совокупность всех окрестностей указанного в предложении V вида образует базис фильтра окрестностей множества F.*

В самом деле рассмотрим открытое множество G, содержащее множество F и обозначим через N_1 такой нормальный конус, что $F_{N_1} = G'$. Так как $F_{N \vee N_1} = F_N \cap F_{N_1} = \varnothing = F_K$, то $N \vee N_1 = K$. Поэтому найдутся такие элементы $x \in N$ и $x_1 \in N_1$, что $x \vee x_1 = \mathbf{1}$. Но тогда

$$\begin{aligned}(x - {}^1/_2\mathbf{1})^+ \vee (x_1 - {}^1/_2\mathbf{1})^+ &= \\ = (x - {}^1/_2\mathbf{1}) \vee (x_1 - {}^1/_2\mathbf{1}) \vee \mathbf{0} &= \\ = [x \vee x_1 \vee ({}^1/_2\mathbf{1})] = {}^1/_2\mathbf{1} &= {}^1/_2\mathbf{1}.\end{aligned}$$

•

Тем самым $F_{[(x-1/2\mathbf{1})^+]} \cap F_{[(x_1-1/2\mathbf{1})^+]} = \varnothing$, так что $F_{[(x-1/2\mathbf{1})^+]} \subset (F_{[(x_1-1/2\mathbf{1})^+]})' \subset (F_{N_1})' = G$.

VII. *Если векторная решетка X — архимедова и N^d — дизъюнктное дополнение нормального конуса N, то множество F_{N^d} совпадает с замыканием $\overline{(F_N)'}$ дополнения $(F_N)'$ множества F_N.*

В самом деле, отметим прежде всего, что в силу предложения I из **2.4** дизъюнктное дополнение N^d, будучи предкомпонентой конуса K, является нормальным конусом, так что имеет смысл говорить о множестве F_{N^d}. Поскольку $N \cap N^d = \{\mathbf{0}\}$, то $F_N \cup F_{N^d} = Q$, так что $F_{N^d} \supset (F_N)'$ и, значит, $F_{N^d} \supset \overline{(F_N)'}$.

Пусть N' — такой нормальный конус, что $F_{N'}=\overline{(F_N)}'$. Поскольку $F_{N\cap N'}=F_N\cup F_{N'}=Q$, то в силу предложения IV $N\cap N'\subset K\cap p^{-1}[0]=\{0\}$. А тогда, как легко понять $N'\subset N^d$ и $\overline{(F_N)}'=F_{N'}\supset F_{N^d}$.

Заменяя в предложении VII нормальный конус N конусом N^d, получаем

VIII. *Каков бы ни был нормальный конус N, в условиях предложения* VII $F_{N^{dd}}=\overline{(F_N)}^\circ$. *В частности, если замкнутое множество F_N регулярно, т. е. совпадает с замыканием своей внутренности, то $F_{N^{dd}}=F_N$.*

IX. *Если H — предкомпонента конуса K, на которую существует дизъюнктный проектор, то множество F_H открыто-замкнуто. Обратно, если в условиях предложения* VII *N — такой нормальный конус, что множество F_N открыто-замкнуто, то N представляет собой предкомпоненту, на которую существует дизъюнктный проектор.*

Действительно, существование проектора на предкомпоненту H согласно предложению IV из **2.4.** равносильно тому, что $H+H^d=H\vee H^d=K$, а это, в свою очередь, эквивалентно соотношению $F_H\cap F_{H^d}=F_{H\vee H^d}=\varnothing$. Так как $F_H\cup F_{H^d}=F_{H\cap H^d}=Q$, то множество F_H открыто-замкнуто в том и только в том случае, когда на предкомпоненту H существует проектор.

Предполагая выполненными условиями предложения VII, рассмотрим такой нормальный конус N, что множество F_N открыто-замкнуто. Полагая $H=N^{dd}$, в силу предложения VIII будем иметь $F_H=\overline{(F_N)}^0=F_N$, так что $F_{N+N^d}=F_{H+N^d}=\varnothing$. Следовательно, $N+N^d=K$. Если P — проектор на предкомпоненту H и $x\in H$, то, представляя x в виде $x=x'+x''(x'\in N,\ x''\in N_d=H^d)$, будем иметь $x=P(x)=P(x')+P(x'')=x'\in N$, т. е. $H=N$.

Считая по-прежнему, что решетка X — архимедова, докажем, что отображение $H\to F_H$ $(H\in\mathfrak{C}(X))$ базы $\mathfrak{C}(X)$ векторной решетки X на совокупность всех регулярных замкнутых множеств пространства Q взаимно-однозначно. В самом деле, если H_1 и H_2 — такие предкомпоненты, что $F_{H_1}=F_{H_2}$, то $F_{H_1\cap H_2^d}=F_{H_1}\cup F_{H_2^d}=Q$, так что $H_1\cap H_2^d\subset K\cap p^{-1}[0]=\{0\}$. Это приводит к включению $H_1 \subset H_2^{dd} = H_2$. Но точно так же и $H_2 \subset H_1$. Легко понять, что указанное выше отображение является антиизоморфизмом. Следовательно, справедливо

X. *Отображение* $H \to F_{Hd}$ $(H \in \mathfrak{G}(X)$ *является изоморфизмом базы* $\mathfrak{G}(X)$ *векторной решетки* X *на полную булевскую алгебру всех регулярных замкнутых множеств гельфандовского компакта* Q *векторной решетки* X.

Таким образом, согласно предложению VII из **0.2.10** выполняется

XI. *Существует такое непрерывное отображение* Φ *стоуновского компакта* Ω *базы* $\mathfrak{G}(X)$ *на гельфандовский компакт* Q *векторной решетки* X, *что прообраз* $\Phi^{-1}[E]$ *произвольного нигде не плотного множества* E *пространства* Q *нигде не плотен в* Ω.

1.2.8. В этом пункте рассмотрим один, как будет показано в § 4, универсальный класс векторных решеток ограниченных элементов.

Пусть T — топологическое пространство. Через C_T обозначим совокупность всех непрерывных ограниченных функций, заданных на T. Поскольку отображение $(x, y) \to x \vee y$ $((x, y) \in \mathbf{R}^2)$ непрерывно, то снабженное стандартной структурой векторного пространства и поточечным порядком множество C_T становится векторной решеткой ограниченных элементов. В качестве сильной единицы можно принять, очевидно, функцию **1**, все значения которой равны единице. Каноническая полунорма p при таком выборе сильной единицы совпадает со стандартной, чебышевской, нормой: $p : f \to \sup\limits_{t \in T} |f(t)|$

так что решетка C_T — архимедова.

Гельфандовский компакт векторной решетки C_T называется по имени чехословацкого математика Чеха *чеховской компактификацией* топологического пространства T и обозначается через βT. Используется также термин *компактификация Чеха — Стоуна.*

Возьмем точку $t \in T$. Поскольку определенное на C_T отображение $\varepsilon_t : f \longrightarrow f(t)$ $(f \in C_T)$ представляет собой линейный функционал, сохраняющий точные границы непустых конечных множеств, то ядро $Z_t = \varepsilon_t^{-1}[0]$ этого функционала будет нормальным подпространством векторной решетки C_T. Так как дефект этого подпространства равен единице, то оно максимально даже в классе всех собственных (т. е. не совпадающих с C_T) подпространств и тем более в классе всех собственных нормальных подпространств. Следовательно, пересечение $q_t = Z_t \cap C_T^+$ (через C_T^+ обозначен конус положительных элементов решетки C_T) будет максимальным нормальным конусом, т. е. элементом множества βT. Очевидно, $q_t = \{f \in C_T^+ : f(t) = 0\}$.

I. *Отображение* $\Psi : t \longrightarrow q_t$ $(t \in T)$ *представляет собой непрерывное отображение топологического пространства* T *в чеховскую компактификацию* βT *этого пространства. При этом область значений* $G = \Psi[T]$ *отображения* Ψ *плотна в* βT.

Действительно, возьмем произвольную точку $q \in \beta T$, функцию $f \in q$ и число $\varepsilon > 0$. Положим $V = F_{[(f-\varepsilon 1)^+]}$[12] и докажем, что

$$\Psi^{-1}[V] = f^{-1}[[-\infty, \varepsilon]] = f^{-1}[[0, \varepsilon]]. \qquad (18)$$

В самом деле, соотношение $t \in \Psi^{-1}[V]$ равносильно тому (см. **2.7**), что $(f - \varepsilon 1)^+ \in q_t = \Psi(t)$, т. е. тому, что $(f(t) - \varepsilon)^+ = (f - \varepsilon 1)^+(t) = 0$. Последнее же означает, что $f(t) - \varepsilon \leqslant 0$, т. е. что $t \in f^{-1}[(-\infty, \varepsilon]]$.

Пусть теперь $t \in T$ и $q = q_t = \Psi(t)$. Если, как и выше, $f \in q$ и $\varepsilon > 0$, то, поскольку $f(t) = 0$, множество $\Psi^{-1}[V]$ в силу (18) является окрестностью (в пространстве T) точки t. Остается заметить, что на основании предложения VI из **2.7** совокупность множеств вида $V = F_{[(f-\varepsilon 1)^+]}$ служит базисом фильтра окрестностей точки $q = q_t$.

Если теперь под q понимать произвольную точку пространства βT и вновь взять $f \in q$ и $\varepsilon > 0$, то ввиду того, что $\inf f[T] = 0$ (если $\alpha = \inf f[T] > 0$, то $\alpha 1 \leqslant f$ и $1 \in q$), прообраз $f^{-1}[[0, \varepsilon]]$ непуст. Тем самым в силу (18) непусто множество $\Psi^{-1}[V]$. Следовательно, непусто и пересечение $V \cap G$. Доказательство заканчивается повторным применением предложения VI из **2.7**.

II. *Если пространство* T *компактно, то область значений отображения* Ψ *совпадает со всем пространством* βT.

В самом деле, поскольку пространство βT хаусдорфово, то непрерывный образ G компакта T замкнут в βT, так что $G = \bar{G} = \beta T$.

---

[12] По поводу обозначений см. **2.7**.

Понятно, что в общем случае отображение Ψ «склеивает» точки пространства T — запас непрерывных функций на T может быть слишком беден. Не исключено, например, что C_T состоит из одних постоянных даже в случае, когда топология пространства T регулярна. Ясно, что для взаимной однозначности отображения Ψ необходимо и достаточно, чтобы для любых двух различных точек t_1, $t_2 \in T$ можно было указать такую функцию $f \in C_T$, что $f(t_1) \neq f(t_2)$. Очевидно, при выполнении этого условия пространство T будет отделимым и даже хаусдорфовым. Однако, как отмечалось, обратное неверно.

Напомним, что отделимое топологическое пространство T называется *вполне регулярным*, если, каковы бы ни были точка $t \in T$ и ее окрестность U, в пространстве C_T существует такая функция f, что $t \in f^{-1}[0]$, $U' \subset f^{-1}[1]$. Понятно, что вполне регулярное пространство удовлетворяет условиям взаимной однозначности отображения Ψ.

III. *Для того чтобы отображение Ψ было гомеоморфизмом пространства T на подпространство $G = \Psi[T]$ чеховской компактификации βT, необходимо и достаточно, чтобы T было вполне регулярно.*

Действительно, если отображение Ψ — гомеоморфизм и, стало быть, взаимно-однозначно, то, как отмечалось, топология пространства T отделима. Пусть t — точка пространства T и U — ее окрестность. Найдется такая окрестность V точки $q_t = \Psi(t)$, что $\Psi[U] \supset V \cap G$. Можно считать, что $V = F_{[(f-\varepsilon 1)+]}$, где f — некоторая функция из нормального конуса q_t и ε — строго положительное число. Ясно, что $f(t) = 0$. А так как в силу (18)

$$U = \Psi^{-1}[\Psi[U]] \supset \Psi^{-1}[V \cap G] = \Psi^{-1}[V] = f^{-1}[(-\infty, \varepsilon]],$$

то функция $(1/\varepsilon f) \wedge \mathbf{1}$ удовлетворяет обоим условиям определения полной регулярности.

Обратно, если t — точка вполне регулярного пространства T, U — ее окрестность, f — функция из определения полной регулярности, то считая $f \geqslant 0$ (это, очевидно, не уменьшает общности) и беря число ε из промежутка $(0, 1)$ с помощью соотношения (18) убедимся, что $\Psi[U] \supset V \cap G$, где $V = F_{[(f-\varepsilon 1)+]}$. Таким образом, Ψ — открыто, а так как оно и взаимно-однозначно, то будет и гомеоморфизмом.

Так как на основании известной теоремы Урысона нормальное топологическое пространство вполне регулярно, то

IV. *Отображение Ψ нормального топологического пространства T в свою чеховскую компактификацию βT является гомеоморфизмом.*

Сопоставляя это с предложением II, приходим к следующему результату.

V. *Хаусдорфово компактное пространство гомеоморфно своей чеховской компактификации.*

§ 3. ПРОСТРАНСТВА КАНТОРОВИЧА

В теории упорядоченных векторных пространств наиболее высокой квалификацией обладают *K-пространства*. Так, в честь Л. В. Канторовича, положившего начало систематическому изучению такого рода пространств, называются векторные решетки, обладающие свойством условной полноты.

1.3.1. С помощью предложения IV из **1.2** и предположения I из **2.1** получается

I. *Для того чтобы упорядоченное векторное пространство X с воспроизводящим конусом K положительных элементов было K-пространством, необходимо и достаточно, чтобы снабженный индуцированным порядком конус K представлял собой условно полное упорядоченное множество*[13].

Действительно, если выполнены указанные условия, то из цитированных предложений вытекает, что X — векторная решетка. Рассмотрим ограниченное сверху непустое множество $E \subset X$. Обозначая через P отображение $x \longrightarrow x^+$ $(x \in X)$, заметим, что в силу предложения III из **2.1** множество $P[E]$ ограничено. Положим $u = \sup P[E]$, $v = \inf P[-E]$, $z = u - v$. Для произвольного $x \in E$ имеем $x = x^+ - x^- \leqslant u - v = z$, так что z — верхняя граница множества E. Если y — еще одна верхняя граница этого множества, то $x^+ \leqslant y^+$, $x^- \geqslant y^-$ для любого

[13] Такого рода конусы часто называют *вполне миниэдральными.*

$x \in E$: Стало быть, $u \leqslant y^+$, $v \geqslant y^-$, $z = u - v \leqslant y^+ - y^- = y$. Отсюда и вытекает, что z — точная верхняя граница множества E.

Учитывая, что при проверке условной полноты верхней решетки достаточно убедиться в ее условной же *фильтрационной полноте*, т. е. в том, что каждое ограниченное сверху фильтрующееся по возрастанию множество имеет точную верхнюю границу, можем высказать следующий критерий K-пространства.

II. *Для того чтобы векторная решетка была K-пространством, необходимо и достаточно, чтобы конус ее положительных элементов обладал свойством условной фильтрационной полноты.*

Для доказательства достаточно заметить, что в силу предложения I из **2.1** конус положительных элементов векторной решетки представляет собой верхнюю решетку.

Наряду с K-пространствами иногда бывает целесообразно рассматривать и так называемые *K_σ-пространства* — векторные решетки, обладающие свойством условной счетной полноты. Имея в виду предложение I из **1.2**, легко понять, что при проверке условной счетной полноты векторной решетки можно ограничиться доказательством существования только точной верхней границы у произвольного (ограниченного сверху, непустого) счетного множества. Это замечание позволяет убедиться в справедливости для K_σ-пространств аналогов предложений I и II, формулировки которых мы предоставляем читателю.

III. *K_σ-пространство* (*и тем более K-пространство*) *представляет собой архимедову векторную решетку* (см. **2.7**).

В самом деле, пусть x — неархимедов элемент K_σ-пространства X. Это означает, что для некоторого $u \in X$ и для любого строго положительного скаляра α имеет место соотношение $|x| \leqslant \alpha u$. Тем самым последовательность $\{n|x|\}$ $(n=1, 2, \ldots)$ ограничена и, стало быть, имеет т. в. г. — $z = \sup n|x|$. Согласно предложению I из **1.2** $z + |z| = \sup (n+1)|x| \leqslant \sup n|x| = z$. Следовательно, $|x| = 0$.

Произведение $\prod\limits_{t \in T} X_t$ семейства K-пространств (или соответственно K_σ-пространств) $\{X_t\}$ $(t \in T)$ также, очевидно, K-пространство (соответственно K_σ-пространство). Поскольку числовая прямая $\mathbf{R}$ представляет собой K-пространство, то в силу сказанного и пространство $\mathbf{R}^T$ всех вещественных функций, заданных на T, будет K-пространством.

Конечно-правильное подпространство (подрешетка) K-пространства, будучи векторной решеткой, может, разумеется, и не быть K-пространством. Однако очевидно, что счетно-правильное подпространство K_σ-пространства — само K_σ-пространство, а правильное подпространство K-пространства является K-пространством.

IV. *Нормальное подпространство X_0, лежащее в K-пространстве X, является K-пространством. При этом вложение X_0 в X сохраняет точные границы непустых множеств.*

Действительно, если E — ограниченное сверху в X_0 непустое множество положительных элементов подпространства X_0 и $v \in X_0$ — его верхняя граница, то $0 \leqslant \leqslant \sup E \leqslant v$, так что в силу нормальности подпространства X_0 должно быть $\sup E \in X_0$. Тем самым т. в. г. множества E относительно порядка в X_0 существует и совпадает с элементом $\sup E$ — т. в. г. множества E относительно порядка в X.

Те же рассуждения показывают, что при переходе от K_σ-пространства к нормальному подпространству свойство быть K_σ-пространством сохраняется.

Фактор-пространство K-пространства по нормальному подпространству может не быть архимедовой векторной решеткой (так будет, например, если X — это K-пространство всех сходящихся к нулю числовых последовательностей[14], а X_0 — прямая сумма счетного множества экземпляров числовой прямой $\mathbf{R}$), так что ввиду предложения III в этом случае фактор-пространство не будет K-пространством. Однако выполняется

V. *Если X — некоторое K-пространство, а X_0 — нормальное и правильное его подпространство, то фактор-пространство $\overline{X} = X/X_0$ является K-пространством, причем канонический гомоморфизм φ пространства X на пространство $\overline{X}$ сохраняет точные границы.*

---

[14] Будучи нормальным подпространством K-пространства всех числовых последовательностей, X в силу предложения IV является K-пространством.

В самом деле, пусть сначала E — множество положительных элементов пространства X, имеющее точную верхнюю границу u, т. е. $u=\sup E$. Положим $\bar{u}=\varphi(u)$. Вследствие монотонности отображения φ элемент $\bar{u}$ служит верхней границей образа $\bar{E}=\varphi[E]$. Пусть $\bar{v}$ — еще одна верхняя граница множества $\bar{E}$. Так как $\bar{v}$, очевидно, положительный элемент фактор-пространства $\bar{X}$, то в классе $\bar{v}$ найдется положительный элемент v пространства X. В соответствии со сказанным в **1.3** для каждого $x\in E$ подберем такой элемент $y_x\in\varphi(x)$, что $y_x\leqslant v$. Заменяя y_x на y_x^+, мы не выйдем из класса $\varphi(x)$: на основании теоремы 2 выполняется $\varphi\left(y_x^+\right)=\left[\varphi\left(y_x\right)\right]^+=[\varphi(x)]^+=$ $=\varphi(x)$ и ввиду того, что $v\geqslant 0$, не нарушим соотношения $y_x\leqslant v$. Таким образом, можно считать, что $y_x\geqslant 0$ $(x\in E)$. Но тогда семейство $\{x-y_x\}$ $(x\in E)$ ограничено сверху (например, элементом u) и, поскольку $\varphi(x)-$ $-y_x)=\varphi(x)-\varphi(y_x)=\varphi(x)-\varphi(x)=X_0$, т. е. поскольку $x-y_x\in X_0$ $(x\in E)$, по условию имеем и $z=$ $=\sup_{x\in E}(x-y_x)\in X_0$. Учитывая, что $x=y_x+(x-y_x)\leqslant v+z$ $(x\in E)$, можем написать: $u=\sup E\leqslant v+z$. Следовательно, $\bar{u}=\varphi(u)\leqslant\varphi(v)+\varphi(z)=\bar{v}$. Этим доказано, что $\bar{u}$ — точная верхняя граница множества $\varphi[E]$.

Так как каждое непустое ограниченное множество положительных элементов фактор-пространства может быть представлено в виде канонического образа некоторого ограниченного множества положительных элементов данного пространства, то из доказанного с помощью предложения I вытекает, что $\bar{X}$ — это K-пространство.

Рассмотрим теперь произвольное непустое ограниченное сверху множество $E\subset X$. Если $x_0\in E$, то в силу предложения I из **1.2** и предложения III из **2.1** будет $\sup E=\sup_{x\in E}(x-x_0)^+ + x_0$ и точно так же $\sup\varphi[E]=$ $\sup_{x\in E}[\varphi(x)-\varphi(x_0)]^+ + \varphi(x_0)$. Но по доказанному $\varphi(\sup_{x\in E}(x-x_0)^+)=\sup_{x\in E}\varphi((x-x_0)^+)=\sup_{x\in E}[\varphi(x)-$ $-\varphi(x_0)]^+$. Следовательно, $\sup\varphi[E]=\varphi(\sup E)$.

Если в доказательстве предложения V под E понимать счетное множество, то мы приходим к следующему результату.

VI. *Если X — K_σ-пространство и X_0 — его нормальное и счетно-правильное подпространство, то фактор-пространство X/X_0 также будет K_σ-пространством и канони-*

ческий гомоморфизм сохраняет точные границы счетных множеств.

Если K_σ-пространство снабдить дополнительной структурой, достаточно хорошо согласованной со структурами порядка и векторного пространства, то в ряде случаев удается доказать его условную полноту, т. е. доказать, что на самом деле оно является K-пространством. Укажем на один из таких случаев.

Будем говорить, что полунорма p на векторной решетке X *согласована* со структурой векторной решетки (или, проще, что p *монотонна* на X), если для любых таких $x, y \in X$, что $|x| \leqslant |y|$, имеет место неравенство $p(x) \leqslant p(y)$. Монотонную полунорму p будем называть *строго монотонной*, если из соотношения $0 \leqslant x < y$ $(x, y \in X)$ следует неравенство $p(x) < p(y)$. Ясно, что строго монотонная полунорма является нормой.

VII. *Если строго монотонная норма p на K_σ-пространстве X обладает тем свойством, что для любой возрастающей последовательности $\{x_n\}$ положительных элементов пространства X и элемента $u \in X$, связанного с последовательностью $\{x_n\}$ соотношением $u = \sup x_n$, будет $p(u) = \sup p(x_n)$, то X является K-пространством.*

Действительно, пусть E — ограниченное фильтрующееся по возрастанию множество положительных элементов пространства X. Имея в виду доказать существование т. в. г. у множества E, можно, очевидно, считать, что E включает в себя точные верхние границы всех своих непустых конечных подмножеств. Так как E ограничено, то ограниченным будет и числовое множество $p[E]$. Положим $\nu = \sup p[E]$ и для каждого $n = 1, 2, \ldots$ найдем элемент $x_n \in E$ так, чтобы было $\nu - 1/n \leqslant p(x_n) \leqslant \nu$. Заменяя в случае необходимости элемент x_n на $x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n$, можем считать, что построенная последовательность $\{x_n\}$ — возрастающая. Поскольку X — K_σ-пространство, существует точная верхняя граница последовательности $\{x_n\}$: $u = \sup x_n$. По условию $p(u) = \sup p(x_n) = \nu$. Докажем, что u и есть точная верхняя граница всего множества E. Возьмем элемент $x \in E$. Ввиду того, что $x \vee x_n \in E$ $(n = 1, 2, \ldots)$, будет $\nu - 1/n \leqslant p(x_n) \leqslant p(x \vee x_n) \leqslant \nu$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Поэтому если обозначить $v = \sup (x \vee x_n)$, то $p(v) = \sup p(x \vee x_n) = \nu$. Но $v = x \vee u \geqslant u$. Стало быть, равенство $\nu = p(u) = p(v)$ возможно лишь при $u = v$. Таким образом, $x \leqslant v = u$, т. е. u есть верхняя граница множества E. Будучи точной верхней границей подмножества множества E, элемент u является тем самым точной верхней границей и всего множества E.

Укажем пример описанной в предложении VII ситуации. Пусть $\mathfrak{A}$ — счетно-полная булевская алгебра подмножеств множества T, на которой задана мера μ (см. **2.3**). Подразумевая под X совокупность всех (конечных) суммируемых функций, снабженную стандартными структурами векторного пространства и порядка, заметим, что в силу теоремы Леви о предельном переходе под знаком интеграла X представляет собой K_σ-пространство. Функционал $p: x \to \int\limits_T |x|\, d\mu$ $(x \in X)$ оказывается, очевидно, полунормой на X, обращающейся в нуль на множестве X_0 всех функций из X, почти везде равных нулю. Поскольку полунорма p монотонна, X_0 — нормальное подпространство. Обозначим через $L_{T,\mu}$ фактор-пространство X/X_0. Так как в силу той же теоремы Леви подпространство X_0 счетно-правильно, то векторная решетка $L_{T,\mu}$ будет во всяком случае K_σ-пространством. Снижение полунормы p на фактор-пространство $L_{T,\mu}$ будет нормой, которая удовлетворяет всем условиям предложения VII. Тем самым $L_{T,\mu}$ оказывается K-пространством. Оно называется *K-пространством суммируемых на T функции*[15].

1.3.2. В случае, когда X — K-пространство, база $\mathfrak{E}(X)$ может быть охарактеризована более полно. Прежде всего отметим, что на основании сказанного в **0.2.10** на каждую предкомпоненту конуса K положительных элементов пространства X существует дизъюнктный проектор, т. е., иными словами,

I. *База $\mathfrak{E}(X)$ K-пространства X состоит лишь из дополняемых предкомпонент.*

В дополнение к сказанному в предложении I из **2.4** установим

II. *Для того чтобы конус H K-пространства X был предкомпонентой, необходимо и достаточно, чтобы он нормально и правильно содержался в конусе K положительных элементов пространства X.*

---

[15] Хотя в общем случае элементами пространства $L_{T,\mu}$ служат классы функций, совпадающих почти везде.

В самом деле, считая, что конус H удовлетворяет высказанным условиям, положим $P : x \to \sup([0, x] \quad H)$ $(x \in K)$. Ввиду нормальности и правильности конуса H отображение P идемпотентно. Ясно, кроме того, что $0 \leqslant P(x) \leqslant x$ $(x \in K)$. Используя нормальность конуса H и опираясь на результат теоремы 3, нетрудно проверить, что

$$[0, x + y] \cap H = ([0, x] \cap H) + ([0, y] \cap H) \quad (x, y \in K),$$

так что $P(x+y) = P(x) + P(y)$ $(x, y \in K)$. Поскольку положительная однородность отображения P не вызывает сомнений, последнее соотношение показывает, что P — предлинейный оператор. Таким образом, линейное распространение $\tilde{P}$ оператора P на X удовлетворяет условиям теоремы 4 и, следовательно, является проектором на компоненту $X_0 = \{x \in X : \tilde{P}(x) = x\}$. Тем самым P служит проектором на предкомпоненту $X_0 \cap K = \{x \in K : P(x) = x\}$, которая совпадает с конусом H. Стало быть, H — предкомпонента.

Предложение II, сформулированное в терминах компонент, дает

III. *Для того чтобы подпространство X_0, лежащее в K-пространстве X, было компонентой, необходимо и достаточно, чтобы X_0 было нормальным и правильным.*

В условиях предложения III фактор-пространство $\overline{X} = X/X_0$ будет K-пространством (предложение V из **3.1**).

IV. *Если X_0 — компонента K-пространства X, то фактор-пространство $\overline{X} = X/X_0$ изоморфно дизъюнктному дополнению X_0^d компоненты X_0. При этом изоморфизм указанных K-пространств осуществляется снижением проектора P_0 на компоненту X_0^d.*

Справедливость высказанного утверждения вытекает из того, что в силу предложения IV из **2.4** будет $X_0 + X_0^d = X$ и, кроме того, $X_0 = \{x \in X : P_0(x) = 0\}$ (см. **0.2.10**).

С помощью предложения I получается также

V. *Гельфандовский компакт Q, отвечающий K-пространству ограниченных элементов X, гомеоморфен стоуновскому компакту Ω базы $\mathfrak{E}(X)$ пространства X.*

Действительно, в силу предложений VIII и IX из **2.7** замкнутое множество Q в условиях настоящего предложения регулярно тогда и только тогда, когда оно открыто-замкнуто. Таким образом, совокупность всех открыто-замкнутых множеств пространства Q совпадает с полной булевской алгеброй $\mathfrak{F}_r(Q)$ регулярных замкнутых множеств. Следовательно, компакт Q вполне несвязен и, стало быть, гомеоморфен стоуновскому компакту булевской алгебры $\mathfrak{F}_r(Q)$ всех своих открыто-замкнутых множеств (предложение VII из **0.2.10**). Остается воспользоваться предложением X из **2.7**.

Гельфандовский компакт K_σ-пространства ограниченных элементов также поддается полному описанию.

VI. *Гельфандовский компакт Q K_σ-пространства X ограниченных элементов квазиэкстремально несвязен: внутренность каждого замкнутого множества типа G_δ замкнута.*

Напомним прежде всего, что множество F топологического пространства Q называется *множеством типа* G_δ, если существует такая не более чем счетная совокупность $\mathfrak{A}$ окрестностей множества F, что $F = \bigcap_{U\in\mathfrak{A}} U$. Так как при этом $F \subset \bigcap_{U\in\mathfrak{A}} U^\circ \subset F$, то множества, входящие в $\mathfrak{A}$, можно считать открытыми. Ясно также, что в качестве $\mathfrak{A}$ всегда можно взять фильтрующуюся по убыванию совокупность. Применительно к рассматриваемому случаю, когда пространство Q — хаусдорфов компакт, а множество F — замкнуто, можно, заменяя окрестности из $\mathfrak{A}$ меньшими регулярными замкнутыми окрестностями множества F, добиться того, что все окрестности из $\mathfrak{A}$ будут замкнутыми регулярными множествами[16].

Итак, рассмотрим замкнутое типа G_δ множество F гельфандовского компакта Q, и пусть $\mathfrak{A}$ — такая фильтрующаяся по убыванию не более чем счетная совокупность регулярных окрестностей множества F, что $F = \bigcap_{U\in\mathfrak{A}} U$. Используя терминологию и обозначения из **2.7**, найдем, опираясь на результат предложения X из **2.7**, такое фильтрующееся по возрастанию не более чем счетное множество $\mathfrak{H}$ предкомпонент, что $\mathfrak{A}$ совпадает с совокупностью всех множеств вида F_H $(H \in \mathfrak{H})$. Полагая $N = \bigcup_{H\in\mathfrak{H}} H = \sup \mathfrak{H}$ (предложение IV из **2.6**), будем меть (см. соотношения (17) из **2.7**) $F_N = \bigcap_{H\in\mathfrak{H}} F_H =$

---

[16] Как нетрудно понять, при этих условиях $\mathfrak{A}$ оказывается базисом фильтра окрестностей множества F.

$=\bigcap_{U\in\mathfrak{A}} U=F$. То обстоятельство, что F_H служит окрестностью множества $F=F_N$, записывается при этом в виде $N\vee H^d=K$, где под K понимается, как обычно, конус положительных элементов пространства X. Обозначая через $\mathbf{1}$ единицу пространства X и опираясь на предложение III из **2.6**, для каждого $H\in\mathfrak{H}$ подберем такие элементы $x_H\in N$, $y_H\in H^d$, что $x_H\vee y_H=\mathbf{1}$. Семейства $\{x_H\}$ $(H\in\mathfrak{H})$ и $\{y_H\}$ $(H\in\mathfrak{H})$ ограничены и не более чем счетны. Поэтому ввиду того, что X — K_σ-пространство, существуют точные границы $\sup_{H\in\mathfrak{H}} x_H=x$; $\inf_{H\in\mathfrak{H}} y_H=y$. Так как при любом $H\in\mathfrak{H}$ имеем $x_H\in N\subset N^{dd}$, то на основании предложения I из **2.4** $x\in N^{dd}$. Соотношения же $y\leqslant y_H$, $y_H\in H^d$ $(H\in\mathfrak{H})$ приводят к тому, что $y\in\bigcap_{H\in\mathfrak{H}} H^d=$ $=N^d$. Но $x\vee y=\inf_{H\in\mathfrak{H}}(x\vee y_H)$, и так как для каждого $H\in\mathfrak{H}$, очевидно, $x\vee y_H\geqslant x_H\vee y_H=\mathbf{1}$, то и $x\vee y\geqslant\mathbf{1}$. Снова прибегая к предложению III из **2.6**, заключаем о равенстве $N^{dd}\vee$ $\vee N^d=K$, из которого вытекает соотношение $F_{N^{dd}}\cap F_{N^d}=$ $=F_K=\varnothing$. На основании предложений VII и VIII из **2.7** это дает $\overline{(F_N)^\circ}\cap\overline{(F_N)'}=\varnothing$, т. е. в терминах, относящихся к исходным данным — $\overline{F^0}\subset F^0$, что и требовалось доказать.

Укажем еще на некоторые результаты топологического характера.

VII. *Пусть X — K-пространство, конус K положительных элементов которого имеет единичный фильтр. Тогда стоуновский компакт Q множества K гомеоморфен стоуновскому компакту Ω базы $\mathfrak{E}(X)$ пространства X.*

Высказанное утверждение является непосредственным следствием предложения VI из **0.2.11**. Заметим, что указанный гомеоморфизм можно выбрать так, что замкнутые множества компакта Q, порожденные фильтрами вида $[x, \rightarrow]$ $(x\in K)$ и замкнутые множества компакта Ω, порожденные предкомпонентами x^{dd} $(x\in K)$, будут соответствовать друг другу.

Привлекая результаты пункта **0.2.13**, с помощью предложения II можно доказать

VIII. *Пусть X — некоторое K-пространство и X_0 — его правильное подпространство. Существует непрерывное открытое отображение Φ стоуновского компакта Ω_0 базы $\mathfrak{E}(X_0)$ подпространства X_0 в стоуновский компакт Ω базы $\mathfrak{E}(X)$ пространства X. При этом областью значений отображения Φ служит открыто-замкнутое множест-*

во, отвечающее предкомпоненте K_0^{dd}, *порожденной конусом* K_0 *положительных элементов подпространства* X_0.

Действительно, докажем, что пересечение $L=H\cap K_0$ произвольной предкомпоненты $H\in\mathfrak{C}(X)$ с конусом K_0 является предкомпонентой конуса K_0, т. е. входит в базу $\mathfrak{C}(X_0)$. Для этого убедимся, что L нормально и правильно содержится в конусе K_0. Пусть $x\in L$, $y\in K_0$ и $y\leqslant x$. Поскольку H, будучи предкомпонентой конуса K положительных элементов всего пространства X, нормально содержится в K, то $y\in H$ и, следовательно, $y\in H\cap K_0=L$. Предкомпонента H правильно содержится в конусе K, а так как K_0 — правильное подмножество множества K, то и пересечение $L=H\cap K_0$ — правильно в K_0. На основании предложения II L — предкомпонента конуса K_0. Таким образом, множества K и K_0 и отношение дизъюнктности в K удовлетворяют требованиям пункта **0.2.13** (и даже в усиленной форме, поскольку на предкомпоненту H не накладывается никаких требований). Применение теоремы 13(**2.0**) завершает доказательство.

I.3.3. Рассмотрим вопрос о погружении произвольной векторной решетки в K-пространство. Понятно, что если иметь в виду взаимно-однозначное погружение, то в силу предложения III из **3.1** необходимым условием возможности такого погружения будет архимедовость данной векторной решетки. Оказывается, что это условие также и достаточно.

Рассмотрим вначале произвольное упорядоченное векторное пространство X с конусом K положительных элементов. Порядок в K, индуцированный порядком в X, обозначим через σ. Оставляя в стороне тривиальный случай, когда K сводится к единственному — нулевому — элементу, будем понимать под $\mathfrak{K}$ совокупность всех σ-компонент множества K, отличных от всего K. Произведение K^2 снабдим каноническим порядком, который обозначим через σ^2. Согласно пункту **0.1.7** совокупность $\mathfrak{K}_{\sigma^2}(K^2)$ всех σ^2-компонент множества K^2 состоит из всевозможных произведений вида $H_1\times H_2$, где H_1 и H_2 — произвольные σ-компоненты (не обязательно отличные от K). Обозначим через θ отображение $(x, y)\longmapsto x+y$ $((x, y)\in K^2)$ множества K^2 в множество K. Поскольку $[0, x]+[0, y]\subset[0, x+y]$ $(x, y\in K)$, т. е. поскольку $\theta[\overline{\{(x, y)\}}]\subset\overline{\{\theta(x, y)\}}$, отображение θ допускает снижение (см. **0.1.6.**), которое обозначим через $\tilde{\Theta}$. В соответствии с определением

$$\Theta(H_1 \times H_2) = \widetilde{\theta[H_1 \times H_2]} = \widetilde{H_1 + H_2} = \pi_\sigma^{-1}(\pi_\sigma(H_1 + H_2))$$
$$(H_1, H_2 \in \mathfrak{K}).$$

Нетрудно понять, что $\Theta(H_1 \times H_2) \in \mathfrak{K}$, каковы бы ни были σ-компоненты H_1 и H_2 из $\mathfrak{K}$: равенство $\widetilde{H_1+H_2}=K$ влечет за собой соотношение $\pi_\sigma(H_1+H_2)=\varnothing$, которое означает неограниченность сверху множества H_1+H_2, а это возможно лишь в случае неограниченности хотя бы одного из множеств H_1 или H_2.

I. *Множество $\mathfrak{K}$ вместе с отображением $(H_1, H_2) \mapsto \Theta(H_1 \times H_2)$ $(H_1, H_2 \in \mathfrak{K})$ является полугруппой с нейтральным элементом.*

Действительно, обозначим для краткости $H_1 \dotplus H_2 = \Theta(H_1 \times H_2) = (\widetilde{H_1+H_2})$ $(H_1, H_2 \in \mathfrak{K})$ и докажем, что $H_1 \dotplus (H_2 \dotplus H_3) = (H_1 \dotplus H_2) \dotplus H_3$ $(H_i \in \mathfrak{K};\ i=1, 2, 3)$. Для этого убедимся в справедливости равенства $H_1 \dotplus (H_2 \dotplus H_3) = (\widetilde{H_1+H_2+H_3})$. С одной стороны, очевидно, $H_1+H_2+H_3 \subset H_1 + (H_2 \dotplus H_3) \subset H_1 \dotplus (H_2 \dotplus H_3)$. С другой стороны, для любых $x_i \in H_i$ $(i=1, 2, 3)$ и $u \in \pi(H_1+H_2+H_3)$ будет $x_1+x_2+x_3 \leqslant u$, т. е. $x_2+x_3 \leqslant u-x_1$, так что $u-x_1 \in \pi(H_2+H_3) = \pi(H_2 \dotplus H_3)$ и, значит, $u \in \pi(H_1 + (H_2 \dotplus H_3))$. Таким образом, $\pi[H_1+H_2+H_3) \subset \pi(H_1 + (H_2 \dotplus H_3))$. Следовательно, $\widetilde{H_1+H_2+H_3} \supset \widetilde{H_1 + (H_2 \dotplus H_3)} = H_1 \dotplus (H_2 \dotplus H_3)$, что вместе с предыдущим доказывает требуемое равенство. Поскольку точно так же и $(H_1 \dotplus H_2) \dotplus H_3 = (\widetilde{H_1+H_2+H_3})$, то ассоциативность операции Θ установлена. Коммутативность ее не нуждается в доказательстве. Роль нейтрального элемента играет наименьшая σ-компонента $\{0\}$.

Пусть, далее α — положительный скаляр. Полагая $\Psi_\alpha : H \mapsto \alpha H$ $(H \in \mathfrak{K},)$ без труда убедимся, что для полугруппы $\mathfrak{K}$ и семейства отображений Ψ_α $(\alpha \in \mathbf{R}^+)$ вывыполнены аксиомы конического пространства (см. **1.1**): так, например, при $\alpha > 0$ будет

$$\alpha(H_1 \dotplus H_2) = \alpha\pi^{-1}(\pi(H_1+H_2)) = \pi^{-1}(1/\alpha\pi(H_1+H_2)) =$$
$$= \pi^{-1}(\pi(\alpha H_1 + \alpha H_2)) = \alpha H_1 \dotplus \alpha H_2 \quad (H_1, H_2 \in \mathfrak{K}).$$

Очевидно, это соотношение сохраняется и при $\alpha=0$. Столь же просто проверяются и остальные аксиомы канонического пространства.

Будем теперь считать пространство X векторной решеткой.

II. *Если одна из* σ-компонент H_1, H_2 — *главная, то* $H_1\dotplus H_2=H_1+H_2$.

Допустим, например, что $H_1=\pi^{-1}(\pi(x))=[\mathbf{0}, x]$, где x — некоторый элемент конуса K. Докажем, что тогда $H_1+H_2=\pi^{-1}(x+\pi(H_2))$. Возьмем элемент z из поляры $\pi^{-1}(x+\pi(H_2))$. Для любого $u\in\pi(H_2)$ имеем $z\leqslant x+u$ и, следовательно, $z-x\leqslant u$. Так как $u\geqslant\mathbf{0}$, то и $(z-x)^+\leqslant u$. Поэтому $(z-x)^+\in\pi^{-1}(\pi(H_2))=H_2$. Но $z=x+(z-x)\leqslant \leqslant x+(z-x)^+$. Согласно теореме 3 существуют такие элементы — $x_1\in[\mathbf{0}, x]$ и $x_2\in[\mathbf{0},(z-x)^+]$, что $z=x_1+x_2$. Ввиду того, что $x_2\in H_2$, получаем $z\in[\mathbf{0}, x]+H_2$, так что $[\mathbf{0}, x]+H_2\supset\pi^{-1}(x+\pi(H_2))$. Поскольку обратное включение выполнено тривиальным образом, то $H_1+H_2= =\pi^{-1}(x+\pi(H_2))$. Таким образом, множество H_1+H_2 является σ-компонентой и, стало быть, $H_1+H_2=\overline{H_1+H_2}= =H_1\dotplus H_2$.

III. *Если векторная решетка X архимедова, то коническое пространство $\mathfrak{K}$ является векторным предпространством.*

Действительно, пусть H_1, H_2, H — такие элементы из $\mathfrak{K}$, что $H_1\dotplus H\subset H_2\dotplus H$. Возьмем какой-либо элемент $u\in\pi(H_2)$ и, учитывая результат предложения II, напишем соотношение: $H_1+H\subset H_1\dotplus H\subset H_2\dotplus H\subset[\mathbf{0}, u]+H$. Возьмем $x\in H_1$ и введем множество $E=\{h\in H : \mathbf{0}\leqslant x- -h\leqslant u\}$ и пусть $h_0\in\pi^{-1}(E)$. Поскольку $x+h_0\in H_1+H$, то существуют такие элементы $y\in[\mathbf{0}, u]$ и $h_1\in H$, что $x+h_0=y+h_1$. Так как $x\leqslant y+h_1$, то элемент x можно представить в виде $x=y'+h'$, где $y'\in[\mathbf{0}, y]$, $h'\in[\mathbf{0}, h_1]$. Но $h'\in E$. Поэтому $h_1\geqslant h'\geqslant h_0$. Следовательно, учитывая, что $x=y+(h_1-h_0)$, можем заключить: $h_1-h_0\geqslant h_0$, т. е. $h_1\geqslant 2h_0$. Тем самым $2h_0\in H$. По индукции без труда докажем, что вообще $nh_0\in H$ при любом $n=1, 2, \ldots$ Так как H ограничено, то ввиду архимедовости решетки X это возможно лишь при $h_0=\mathbf{0}$. Таким образом, $\pi^{-1}(E)= =\{\mathbf{0}\}$. Это означает, что $\mathbf{0}$ является т. н. г. множества E относительно порядка в K, а значит, в силу предложения I из **2.1** и относительно порядка в X. Но тогда на основании предложения I из **1.1** $x=\sup(x-E)\in[0, u]$. Ввиду произвольности u имеем $x\in\bigcap_{u\in\pi(H_2)}\pi^{-1}(u)=\pi^{-1}(\pi(H_2))=H_2$. Этим доказано включение $H_1\subset H_2$. Если $H_1\dotplus H=H_2\dotplus H$, то справедливо и обратное включение: $H_2\subset H_1$, т. е. $H_1=H_2$.

По теореме 1 существует векторное пространство $\mathfrak{X}$ и воспроизводящий конус L в нем, который изоморфен векторному предпространству $\mathfrak{K}$. В дальнейшем мы будем отождествлять конус L с векторным предпространством $\mathfrak{K}$, т. е. считать, что $\mathfrak{X}=\mathfrak{K}-\mathfrak{K}$. Заметим сразу же, что при этом конус $\mathfrak{K}$ — острый, поскольку если $H\dotplus H=\{0\}$ для некоторого $H\in\mathfrak{K}$, то, очевидно, $H=\{0\}$.

Конус $\mathfrak{K}$ определяет в векторном пространстве $\mathfrak{X}$ порядок, который индуцирует порядок ρ на $\mathfrak{K}$, т. е. $(H_1, H_2)\in\rho$ означает, что существует такая σ-компонента $H\in\mathfrak{K}$, что $H_2=H_1\dotplus H$. Очевидно, порядок ρ содержится в естественном порядке (по включению): если $(H_1, H_2)\in\rho$, то $H_1\subset H_2$. Докажем, что на самом деле указанные порядки совпадают. Это вытекает из следующего предложения.

IV. *Если H, $H_0\in\mathfrak{K}$ и $H\subset H_0$, то существует такая σ-компонента H_1, что $H_0=H\dotplus H_1$.*

В самом деле, поскольку $\pi(H_0)\subset\pi(H)$, то $\pi(H_0)-H\subset\pi(H)-H\subset K$. Поэтому имеет смысл говорить о σ-компоненте $H_1=\pi^{-1}(\pi(H_0)-H)$. Если $h\in H$, $x\in H_1$, $v\in\pi(H_0)$, то $h+x\leqslant h+(v-h)=v$, так что $\widetilde{H+H_1}\subset\pi^{-1}(\pi(H_0))=H_0$. Следовательно, и $H\dotplus H_1=\widetilde{H+H_1}\subset H_0$. Отметим, что если $H_1=\{0\}$, то $H_0=H$. Действительно, пусть $u\in H_0$, $z\in\pi(H)$, $v\in\pi(H_0)$, $h\in H$. Очевидно, $u-z\leqslant v-h$ и, значит $(u-z)^+\leqslant(v-h)^+=v-h$. Поэтому $(u-z)^+\in H_1$, так что, предполагая $H_1=\{0\}$, должны будем иметь $(u-z)^+=0$ и, стало быть, $u\leqslant z$. Отсюда $H_0\subset\pi^{-1}(\pi(H))=H$. Если $H_2=H\dotplus H_1\neq H_0$, то по доказанному можно указать σ-компоненту H_3, которая содержит отличные от нулевого элементы и удовлетворяет соотношению $H_2\dotplus H_3\subset H_0$. Тем самым $H+H_1+H_3\subset H_0$ и, следовательно, каковы бы ни были элементы $h\in H$, $x\in H_1$, $y\in H_3$, $v\in\pi(H_0)$, будет $h+x+y\leqslant v$, т. е. $x+y\leqslant v-h$. Это означает, что справедливо включение $H_1\dotplus H_3\subset H_1$, возможное лишь при $H_3=\{0\}$. Итак, $H\dotplus H_1=H_0$.

Множество $\mathfrak{K}$, упорядоченное по включению, условно полно (см. **0.2.3**). Поэтому согласно предложению I из

3.1 упорядоченное векторное пространство $\mathfrak{X}$ является K-пространством.

В силу предложения II каноническое отображение $\varphi : x \longrightarrow [0, x]$ ($x \in K$), если его рассматривать как отображение $K \longrightarrow \mathfrak{X}$, является предлинейным оператором и потому допускает (единственное) линейное распространение Φ на все X. Так как φ — взаимно-однозначно (теорема 3(2.0)), будет взаимно-однозначным и Φ.

Резюмируя все сказанное выше, приходим к следующему фундаментальному результату, который обычно называют *теоремой Дедекинда — Юдина* о K-пополнении.

Теорема 5(3.1). *Если X — архимедова векторная решетка, то существует такое K-пространство $\mathfrak{X}$ и такой взаимно-однозначный линейный оператор $\Phi : X \longrightarrow \mathfrak{X}$, что Φ сохраняет точные границы произвольных множеств и для любого $\xi \in \mathfrak{X}$ будет*

$$\xi = \sup([\leftarrow, \xi] \cap \Phi[X]). \qquad (1)$$

Доказательство. Убедимся сначала, что Φ так же, как и φ, сохраняет точные границы произвольных множеств. Пусть E — множество в векторной решетке X, имеющее, например, точную верхнюю границу (в X) : $\sup E = u$. Поскольку $\inf(u - E) = \mathbf{0}$ и $u - E \subset K$, то согласно предложению II из **0.2.3** $\inf \varphi[u - E] = \{0\}$. На основании предложения I из **2.1** можно написать поэтому $\inf \Phi[u - E] = \{0\}$, так что $\sup \Phi[\mathrm{E}] = \sup(\Phi(u) - \Phi[u - E]) \doteq \Phi(u) - \inf \Phi[u - E] = \Phi(u)$. Поскольку оператор Φ — линейный, то в силу предложения I из **1.2** он сохраняет и точные нижние границы.

Убедимся в справедливости соотношения (1). Данный элемент $\xi \in \mathfrak{X}$ представим в форме разности (которую будем обозначать символом $\dot{-}$) элементов конуса $\mathfrak{K} : \xi = H_1 \dot{-} H_2$ ($H_1, H_2 \in \mathfrak{K}$). Беря $x \in \pi(H_2)$, можем написать: $\xi = (H_1 \dot{+} \Phi(x) \dot{-} H_2) \dot{-} \Phi(x)$. Поскольку $\Phi(x) \supset H_2$, то $H_1 \dot{+} \Phi(x) \dot{-} H_2 \in \mathfrak{K}$. Таким образом, наряду с представлением $H_1 \dot{-} H_2 = \xi$ имеется такого же рода представление $\xi = (H_1 \dot{+} \Phi(x) \dot{-} H_2) \dot{-} \Phi(x)$. Это позволяет считать, что уже в исходном представлении $H_2 = \Phi(x) \in \Phi[K]$. Поскольку, очевидно,

$$[\leftarrow, H_1] \cap \Phi[X] = [\leftarrow, \xi \dot{+} \Phi(x)] \cap \Phi[X] =$$
$$= ([\leftarrow, \xi] \cap \Phi[X]) \dot{+} \Phi(x),$$

то $\sup([\leftarrow, \xi] \cap \Phi[X]) = \sup([\leftarrow, H_1] \cap \Phi[X]) \dot{-} \Phi(x)$. Но $\sup([\leftarrow, H_1] \cap \Phi[X]) \supset \bigcup_{y \in H_1} [0, y] = H_1$. Поэтому $\sup([\leftarrow, \xi] \cap \Phi[X]) \geqslant H_1 \dot{-} \Phi(x) = \xi$. Обратное соотношение очевидно.

K-пространство $\mathfrak{X}$ называется *K-пополнением данной* векторной решетки, X, а оператор Φ — *каноническим вложением* векторной решетки X в ее K-пополнение.

Замечание 1. Поскольку оператор Φ является изоморфизмом векторной решетки X на некоторое конечно-правильное подпространство $\mathfrak{X}_0 = \Phi[X]$ ее K-пополнения $\mathfrak{X}$, то, отождествляя элемент $x \in X$ с элементом $\Phi(x) \in \mathfrak{X}_0$, мы можем считать, что сама векторная решетка X является подпространством K-пространства $\mathfrak{X}$. При этом вложение $i : X \longrightarrow \mathfrak{X}$ сохраняет точные границы произвольных множеств, а соотношение (1) переписывается в виде $\xi = \sup([\leftarrow, \xi] \cap X)$ $(\xi \in \mathfrak{X})$.

Замечание 2. Понятно, что архимедовость векторной решетки X является необходимым условием того, чтобы ее можно было изоморфно отобразить на подпространство K-пространства. Тем более это условие необходимо для существования K-пополнения.

Рассмотрим K-пространство Z и его конечно-правильное подпространство X. Векторная решетка X, будучи архимедовой, имеет K-пополнение $\mathfrak{X}$. Не следует, однако, думать, что K-пространство $\mathfrak{X}$ можно реализовать как хотя бы конечно-правильное подпространство пространства Z. Тем не менее справедливо

V. *Если K-пространство Z таково, что для любого положительного его элемента z имеет место равенство*

$$z = \sup([0, z] \cap K) = \inf([z, \rightarrow] \cap K), \tag{2}$$

где K — конус положительных элементов подпространства X, то каноническое вложение Φ векторной решетки X в ее K-пополнении $\mathfrak{X}$ может быть распространено до изоморфизма K-пространства Z на K-пространство $\mathfrak{X}$.

В самом деле, обозначим через L конус положительных элементов K-пространства Z, через ρ — порядок в L, индуцированный порядком в Z и через σ — порядок в конусе $K = L \cap X$, также индуцированный порядком в Z. Под $\mathfrak{K}$, как и раньше, будем понимать конус положительных элементов K-пространства $\mathfrak{X}$, т. е. совокупность всех (отличных от K) σ-компонент множества K, с порядком, определяемым включением множеств.

Пусть $z \in L$. Положим $H = [0, z] \cap K$ и докажем, что $H \in \mathfrak{K}$. Действительно, очевидно, $H \subset \pi_\sigma^{-1}([z, \to] \cap K)$. Обратно, если $x \in \pi_\sigma^{-1}([z, \to] \cap K)$, то по условию $x \leqslant \rho\text{-}\inf([z, \to] \cap K) = z$, т. е. $x \in H$. Таким образом, $H = \pi_\sigma^{-1}([z, \to] \cap K) \in \mathfrak{K}$. Отметим, что при этом $\pi_\sigma(H) = [z, \to] \cap K$, так как если $y \in \pi_\sigma(H)$, то $y \geqslant \rho\text{-}\sup([0, z] \cap K) = z$, т. е. $y \in [z, \to] \cap K$.

Положим $\theta : z \to H_z = [0, z] \cap K$ $(z \in L)$. Ясно, что θ — возрастающее отображение конуса L в конус $\mathfrak{K}$. Кроме того, если $z \in K$, то $\theta(z) = [0, z] \cap K = \{x \in K : x \leqslant z\} = \Phi(z)$, так что θ служит распространением отображения Φ. Если принять $\psi : H \longrightarrow \rho\text{-}\sup H$ $(H \in \mathfrak{K})$, то по условию $\psi(\theta(z)) = \sup([0, z] \cap K) = z$ для каждого $z \in L$. Точно так же для $H \in \mathfrak{K}$, $z = \psi(H)$, поскольку, как отмечалось, $\theta(z) = \pi_\sigma^{-1}([z, \to] \cap K) = H$, то $\theta(\psi(H)) = H$. Таким образом, θ взаимно-однозначно отображает конус L на конус $\mathfrak{K}$. Так как обратное отображение ψ возрастающее, то θ будет изоморфизмом упорядоченного множества L на упорядоченное множество $\mathfrak{K}$. Будем рассматривать θ как отображение конуса L в K-пространстве $\mathfrak{X}$ и докажем, что оно предлинейно. Если $z \in L$, $x \in K$, то

$$\theta(z + x) = [0, z + x] \cap K = ([0, z] \cap K) \dotplus ([0, x] \cap K) = \theta(z) \dotplus \theta(x), \tag{3}$$

и для произвольного $u \in L$, обозначая $E = [0, u] \cap K$, имеем в силу (3)

$$\theta(z + u) = \theta(z + \sup E) = \theta(\sup(z + E)) = \sup \theta[z + E] = \sup(\theta(z) \dotplus \theta[E]) = \theta(z) \dotplus \sup \theta[E] = \theta(z) \dotplus \theta(u).$$

Для завершения доказательства остается распространить отображение θ до линейного отображения Θ K-пространства Z на K-пространство $\mathfrak{X}$.

Используя результат предложения VI из **0.2.13**, отметим в заключение следующий факт.

VI. *Если X — архимедова решетка и $\mathfrak{X}$ — ее K-пополнение, то базы $\mathfrak{S}(X)$ и $\mathfrak{S}(\mathfrak{X})$ изоморфны.*

1.3.4. Пусть X — упорядоченное векторное пространство с воспроизводящим конусом K положительных элементов, Y — K-пространство.

I. *Пространство $L^r(X, Y)$ всех регулярных операторов, отображающих пространство X в пространство Y, обладает свойством фильтрационной полноты, т. е. если $\mathfrak{A}$ — фильтрующееся по возрастанию, ограниченное сверху (в $L^r(X, Y)$) множество регулярных операторов, то при любом $x \in K$ семейство $\{A(x)\}$ $(A \in \mathfrak{A})$ ограничено сверху в K-пространстве Y и отображение $S_0: x \mapsto \sup_{A \in \mathfrak{A}} A(x)$ $(x \in K)$ — поточечная верхняя граница множества $\mathfrak{A}$ является предлинейным оператором, распространение которого S служит, таким образом, точной верхней границей множества $\mathfrak{A}$ (в пространстве $L^r(X, Y)$).*

Действительно, докажем предлинейность отображения S_0. Пусть $x_1, x_2 \in K$. Положим $x = x_1 + x_2$ и через $\mathfrak{A}_x$ обозначим совокупность всех элементов пространства Y вида $A(x)$ $(A \in \mathfrak{A})$. Аналогичный смысл имеют обозначения $\mathfrak{A}_{x_1}$ и $\mathfrak{A}_{x_2}$. Если $y_i \in \mathfrak{A}_{x_i}$ $(i = 1, 2)$, то при некоторых $A_1, A_2 \in \mathfrak{A}$ будет $y_i = A_i(x_i)$. Найдем в $\mathfrak{A}$ оператор A, превосходящий операторы A_1 и A_2. При этом $y_1 + y_2 = A_1(x_1) + A_2(x_2) \leqslant A(x) \in \mathfrak{A}_x$. Таким образом, для каждого элемента множества $\mathfrak{A}_{x_1} + \mathfrak{A}_{x_2}$ в множестве $\mathfrak{A}_x$ можно указать элемент, больший данного. Поэтому $S_0(x_1) + S_0(x_2) = \sup \mathfrak{A}_{x_1} + \sup \mathfrak{A}_{x_2} = \sup(\mathfrak{A}_{x_1} + \mathfrak{A}_{x_2}) \leqslant \sup \mathfrak{A}_x = S_0(x)$. Поскольку для любого $A \in \mathfrak{A}$ будет $A(x) = A(x_1) + A(x_2) \in \mathfrak{A}_{x_1} + \mathfrak{A}_{x_2}$, то $\mathfrak{A}_x \subset \mathfrak{A}_{x_1} + \mathfrak{A}_{x_2}$, так что $S_0(x) = \sup \mathfrak{A}_x \leqslant \sup(\mathfrak{A}_{x_1} + \mathfrak{A}_{x_2}) = \sup \mathfrak{A}_{x_1} + \sup \mathfrak{A}_{x_2}$. Таким образом, $S_0(x) = S_0(x_1) + S_0(x_2)$. Выполнение соотношения $S_0(\alpha x) = \alpha S_0(x)$ $(x \in K, \alpha \in \mathbf{R}^+)$ не нуждается в проверке.

Поскольку для любого $x \in K$ и какого-либо $A \in \mathfrak{A}$ имеем $(S - A)(x) \geqslant 0$, то оператор $S - A$ положителен и тем более регулярен. Следовательно, будет регулярным и оператор $S = (S - A) + A$.

Доказанное предложение приводит к следующему результату.

Теорема 6(3.1.). *Если X — векторная решетка, а Y — K-пространство, то упорядоченное векторное пространст-*

во $L^r(X, Y)$ всех регулярных операторов, отображающих X в Y, представляет собой K-пространство[17].

Доказательство. Учитывая результат предложения II из **3.1**, достаточно установить, что $L^r(X, Y)$ является векторной решеткой. Возьмем $A \in L^r(X, Y)$ и $x \in K$ (здесь — конус положительных элементов векторной решетки X) и докажем, что образ $A[[0, x]]$ — ограниченное сверху множество K-пространства Y. Действительно, представим A в виде разности $A_1 - A_2$ положительных операторов A_1 и A_2. Для любого $z \in [0, x]$ будет $A(z) = A_1(z) - A_2(z) \leqslant A_1(z) \leqslant A_1(x)$. Положим $A_0: x \longrightarrow \sup A[[0, x]]$ $(x \in K)$. Из теоремы 3 вытекает, что A_0 — предлинейный оператор: для $x_1, x_2 \in K$; $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^+$ имеем

$$A_0(\alpha x_1 + \beta x_2) = \sup A[\alpha[0, x_1] + \beta[0, x_2]] =$$
$$= \alpha \sup A[[0, x_1]] + \beta \sup A[[0, x_2]] =$$
$$= \alpha A_0(x_1) + \beta A_0(x_2).$$

Распространяя A_0 с конуса K на всю решетку X, получим линейный оператор $\bar{A}$. Он, очевидно, положителен: $\bar{A}(x) = A_0(x) \geqslant A(0) = 0$ $(x \in \mathbf{K})$. Если B — положительный оператор (из X в Y), больший, чем A, то для любых $x \in K$ и $z \in [0, x]$ будет $A(z) \leqslant B(z) \leqslant B(x)$, так что $\bar{A}(x) = \sup A[[0, x]] \leqslant B(x)$. Таким образом, $\bar{A} \leqslant B$. Это означает, что $\bar{A} = A \vee 0 = A$[17].

Замечание 1. Как ясно из доказательства теоремы, она остается справедливой, если под X понимать упорядоченное векторное пространство с воспроизводящим конусом K положительных элементов, обладающее, кроме того, тем свойством, что $[0, x] + [0, y] = [0, x+y]$ для любых $x, y \in K$.

Замечание 2. В условиях теоремы (или хотя бы замечания 1), для того чтобы линейный оператор A из X в Y был регулярным, не только необходимо (см. **1.4.**), но и достаточно, чтобы образ $A[E]$ любого ограниченного множества E векторной решетки X был ограниченным множеством в K-пространстве Y. Действительно, если указанное условие выполнено, то множество $A[[0, x]]$ ограничено в пространстве Y при любом $x \in K$,

[17] Теорему 6 часто называют *теоремой Рисса — Канторовича.*

а тогда построенный при доказательстве теоремы оператор $\bar{A}$ линеен, положителен и $A \leqslant \bar{A}$. Отсюда и вытекает, что A — регулярный оператор.

Поскольку числовая прямая $\mathbf{R}$ — K-пространство, то имеет место

Следствие. *Пространство $X^r = L^r(X, \mathbf{R})$ всех регулярных функционалов на векторной решетке X представляет собой K-пространство.*

В условиях доказанной теоремы рассмотрим регулярные операторы A_1, A_2 и $A = A_1 \vee A_2$. Обозначая, как обычно, через K конус положительных элементов векторной решетки X, для $x \in K$ положим $\Delta_x = \{(x', x'') \in K^2 : x' + x'' = x\}$. Так как $A = A_2 + (A_1 - A_2)^+$, то

$$A(x) = A_2(x) + (A_1 - A_2)^+(x) = A_2(x) + \\ + \sup_{x' \in [0,x]} (A_1(x') - A_2(x')) = \sup_{(x', x'') \in \Delta_x} (A_1(x') + \\ + A_2(x'')) \quad (x \in K).$$

Аналогично выводится сходное соотношение для оператора $A_1 \wedge A_2$. Таким образом,

II. *Если A_1 и A_2 — регулярные операторы, отображающие векторную решетку X в K-пространство Y, то*

$$(A_1 \vee A_2)(x) = \sup_{(x', x'') \in \Delta_x} (A_1(x') + A_2(x'')) \quad (x \in K), \tag{4}$$

$$(A_1 \wedge A_2)(x) = \inf_{(x', x'') \in \Delta_x} (A_1(x') + A_2(x'')) \quad (x \in K). \tag{5}$$

В частности, для $A \in L^r(X, Y)$, $x \in K$ выполняется

$$|A|(x) = (A \vee (-A))(x) = \sup_{(x', x'') \in \Delta_x} A(x' - x'') = \\ = \sup A[[-x, x]]. \tag{6}$$

Поскольку для произвольного $x \in X$ будет $x, -x \in [-|x|, |x|]$, то из (6) получаем

$$|A(x)| = A(x) \vee A(-x) \leqslant |A|(|x|) \quad (x \in X). \tag{7}$$

Соотношение (7) носит нормативный характер и может быть включено в рамки следующей полезной общей конструкции.

Пусть X — векторное пространство, U — векторная решетка и $|\cdot|: X \longrightarrow U$ — сублинейный оператор, обладающий теми свойствами, что (а) $|x| \geqslant 0$, $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$; (б) $|\alpha x| = |\alpha||x|$ для $\alpha \in \mathbb{R}$; (в) если $|x| = u_1 + u_2$ для u_1, $u_2 \geqslant 0$, то для некоторых x_1, $x_2 \in X$ выполняется $x_1 + x_2 = x$ и $|x_1| = u_1$; $|x_2| = u_2$. В этом случае говорят, что векторное *пространство X нормировано посредством векторной решетки U*, а оператор $|\cdot|$ называют *абстрактной нормой* (элемента).

Пусть Y — еще одно векторное пространство и V — некоторое K-пространство. Допустим, что Y нормировано посредством V. Соответствующую абстрактную норму также обозначим $|\cdot|$. Говорят, что *оператор $A \in L(X, Y)$ обладает абстрактной нормой*, если для некоторого оператора $B \in L^+(U, V)$ выполняется нормативное неравенство

$$|A(x)| \leqslant B(|x|) \quad (x \in X). \tag{8}$$

Используя теорему 3, легко показать, что среди операторов B, удовлетворяющих (8), существует наименьший элемент (относительно порядка в K-пространстве $L^r(U, V)$). Этот элемент называется *абстрактной нормой оператора A* и обозначается $|A|$. В главе III мы специально займемся операторами с абстрактной нормой, а пока продолжим обсуждение свойств простейшего класса таких операторов — регулярных операторов, действующих из векторной решетки X в K-пространство Y.

Условимся трактовать регулярный оператор как предлинейный оператор на конусе K положительных элементов векторной решетки X — сужение на конус K соответствующего линейного оператора. Через $\mathfrak{K}^r$ обозначим конус положительных элементов $L^+(X, Y)$ K-пространства $L^r(X, Y)$, т. е. совокупность всех положительных предлинейных операторов на конусе K.

Для $A \in \mathfrak{K}^r$ положим $\nu(A) = A^{-1}[0]$. Очевидно, $\nu(A)$ — нормальный конус векторной решетки X. Он называется *нулевым конусом* данного оператора A. Дизъюнктное дополнение $\operatorname{supp} A = (\nu(A))^d$ нулевого конуса $\nu(A)$ называется *носителем* оператора A (или *предкомпонентой его существенной положительности*)[18]. Ясно, что если для $x \in \operatorname{supp} A$ будет $A(x) = 0$, то $x = 0$.

---

[18] Линейная оболочка нулевого конуса $\nu(A)$ называется *нулевой решеткой* оператора $A \in \mathfrak{K}^r$, а линейная оболочка предкомпоненты

Поскольку из $A_1 \leqslant A_2$ $(A_1, A_2 \in \mathfrak{K}^r)$ вытекает, очевидно, что $\nu(A_1) \supset \nu(A_2)$ и, следовательно, что $\operatorname{supp} A_1 \subset \subset \operatorname{supp} A_2$, то отображение $\Theta : A \longrightarrow \operatorname{supp} A$ $(A \in \mathfrak{K}^r)$ будет возрастающим отображением конуса $\mathfrak{K}^r$ в булевскую алгебру $\mathfrak{C}(X)$ всех предкомпонент конуса K.

III. *Отображение* $\Theta: A \longrightarrow \operatorname{supp} A$ $(A \in \mathfrak{K}^r)$ *сохраняет точные верхние границы произвольных множеств.*

В самом деле, ввиду того, что Θ — возрастающее отображение, для множества $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{K}^r$, которое имеет точную верхнюю границу A_0: $\sup \mathfrak{A} = A_0$, будем иметь $\sup \Theta[\mathfrak{A}] \subset \Theta(A_0)$. Для доказательства обратного включения предположим сначала, что $\mathfrak{A}$ состоит из двух элементов — A_1 и A_2. Возьмем $x \in \nu(A_1) \cap \nu(A_2)$. В силу (4) $A_0(x) = \sup\limits_{(x', x'') \in \Delta_x} (A_1(x') + A_2(x''))$. Но если $(x', x'') \in \Delta_x$, то $x', x'' \leqslant x$; поэтому $x', x'' \in \nu(A_1) \cap \nu(A_2)$, так что $A_0(x) = 0$, т. е. $x \in \nu(A_0)$. Таким образом, $\nu(A_0) \supset \nu(A_1) \cap \nu(A_2)$. Следовательно, $\Theta(A_0) = \operatorname{supp} A_0 \subset (\nu(A_1) \cap \nu(A_2))^d = \operatorname{supp} A_1 \vee \operatorname{supp} A_2$. Этим установлено искомое свойство отображения Θ для рассматриваемого случая, а значит, и для случая, когда $\mathfrak{A}$ — произвольное конечное множество. Применяя неоднократно использованный прием добавления к множеству $\mathfrak{A}$ точных верхних границ всевозможных его непустых конечных подмножеств (при этом не изменится ни $\sup \mathfrak{A}$, ни в силу доказанного $\sup \Theta[\mathfrak{A}]$), можем считать, что в случае, когда $\mathfrak{A}$ бесконечно, оно содержит точные верхние границы всех своих непустых конечных подмножеств и тем самым фильтруется по возрастанию. Пусть, как и выше, $x \in \bigcap\limits_{A \in \mathfrak{A}} \nu(A) = \inf\limits_{A \in \mathfrak{A}} \nu(A) = (\sup \Theta[\mathfrak{A}])^d$. Ввиду предложения I из **3.4** $A_0(x) = \sup\limits_{A \in \mathfrak{A}} A(x) = 0$, так что $\operatorname{supp} A_0 = (\nu(A_0))^d \subset (\sup \Theta[\mathfrak{A}])^{dd} = \sup \Theta[\mathfrak{A}]$. Этим предложение доказано в полном объеме.

Предположим, что на векторной решетке X задана монотонная норма (см. **3.1**). Мы будем использовать для нее традиционное обозначение: $x \longrightarrow \|x\|$ $(x \in X)$.

$\operatorname{supp} A$ — *компонентой существенной положительности* данного оператора. Если вернуться к точке зрения на A как на линейный оператор, заданный на всем X, то ядро $\operatorname{Ker}(A) = A^{-1}[0]$ оператора A, понятно, содержит нулевую решетку $\nu(A) - \nu(A)$, однако лишь в исключительных случаях эти подпространства совпадают (ср. предложение III из **II. 2.5**).

IV. *Каждый линейный непрерывный функционал f на X регулярен. Множество X' всех непрерывных линейных функционалов на X служит нормальным подпространством пространства X^r.*

Для доказательства заметим, что если множество E векторной решетки X ограничено в смысле порядка в X, то оно ограничено и по норме. Поэтому, если f — непрерывный линейный функционал на X, то образ $f[E]$ ограничен в $\mathbf{R}$. Таким образом, функционал f удовлетворяет условию замечания 2 к теореме 6 и, следовательно, регулярен.

Если f_0 — линейный непрерывный функционал и f — регулярный функционал такой, что $|f| \leqslant |f_0|$, то согласно (6) и (7)

$$|f(x)| \leqslant |f|(|x|) \leqslant |f_0|(|x|) = \sup f_0[[-|x|,\ |x|]] \leqslant$$
$$\leqslant \|f_0\| \|x\| \quad (x \in X),$$

так что $f \in X'$.

Будучи нормальным подпространством K-пространства X^r, пространство X' само является K-пространством. Как нетрудно проверить, норма $f \longrightarrow \|f\|$ $(f \in X')$ в X' будет монотонной.

Предложение IV может быть обобщено в двух направлениях. Во-первых, вместо решетки с одной монотонной нормой можно в качестве X рассматривать векторную решетку с локально-выпуклой топологией, определяемой совокупностью монотонных полунорм (в этом случае говорят, что локально-выпуклая топология в X *согласована* с порядком). Во-вторых, числовую прямую в качестве пространства значений можно заменить K-пространством Y с локально-выпуклой топологией, согласованной с порядком в Y и обладающей тем свойством, что всякое фильтрующееся по возрастанию множество положительных элементов пространства Y, ограничено и в смысле порядка.

Формулировки и доказательства соответствующих утверждений мы предоставляем читателю.

1.3.5. В K-пространстве $L^r(X, Y)$ всех регулярных операторов, отображающих векторную решетку X в K-пространство Y можно выделить более узкий класс операторов, более полно отражающий связи между порядками в X и Y.

Положительный линейный оператор A (из X в Y) называется *(o)-непрерывным* (или *порядково-непрерывным*), если он сохраняет точные верхние границы фильтрующихся по возрастанию множеств или, что то же, сохраняет точные нижние границы фильтрующихся по убыванию множеств. Понятно также, что при проверке (o)-непрерывности положительного оператора A достаточно убедиться, что $\inf A[E]=\mathbf{0}$ для каждого такого фильтрующегося по убыванию множества $E\subset X$, что $\inf E=\mathbf{0}$.

Произвольный линейный оператор называется *(o)-непрерывным* (или *порядково-непрерывным*), если его можно представить в форме разности положительных (o)-непрерывных операторов. Чтобы обосновать правомерность использования термина «непрерывный» оператор, введем понятие (o)-сходящегося фильтра. Будем говорить, что фильтр $\mathfrak{F}$ непустых множеств в векторной решетке Z *(o)-сходится* к нулевому элементу, если он коинициален по отношению к некоторой фильтрующейся по убыванию совокупности $\mathfrak{B}$ промежутков такой, что $\bigcap\limits_{\Delta\in\mathfrak{B}}\Delta=\{\mathbf{0}\}$. Представляем читателю доказать, что линейный оператор A (o)-непрерывен тогда и только тогда, когда он регулярен и всякий (o)-сходящийся к нулевому элементу фильтр переводит в базис (o)-сходящегося (к нулевому же элементу) фильтра.

I. *Совокупность $L^o(X, Y)$ всех (o)-непрерывных линейных операторов, отображающих векторную решетку X в K-пространство Y представляет собой (дизъюнктную) компоненту K-пространства $L^r(X, Y)$ всех регулярных операторов.*

Как вытекает из определения, достаточно доказать, что совокупность $\mathfrak{K}^o$ всех положительных (o)-непрерывных операторов есть предкомпонента конуса $\mathfrak{K}^r$ всех положительных операторов. Убедимся сначала, что $\mathfrak{K}^o$ — конус. Пусть $A_1, A_2\in\mathfrak{K}^o$; $\alpha, \beta\in\mathbf{R}^+$ и E — такое фильтрующееся по убыванию множество элементов векторной решетки X, что $\inf E=\mathbf{0}$. Возьмем элемент $y\in\alpha A_1[E]+\beta A_2[E]$. При некоторых $x_1, x_2\in E$ будет $y=\alpha A_1(x_1)+\beta A_2(x_2)$. Обозначим через x такой элемент множества E, что $x\leqslant x_1\wedge x_2$. Понятно, что $z=\alpha A_1(x)+$

$+\beta A_2(x)\leqslant y$. Поскольку $z\in(\alpha A_1+\beta A_2)[E]$, то из сказанного следует, что $\inf(\alpha A_1+\beta A_2)[E]\leqslant\inf(\alpha A_1[E]+ +\beta A_2[E])=0$. Таким образом, оператор $\alpha A_1+\beta A_2$ — (o)-непрерывный.

Непосредственно из определения вытекает, что конус $\mathfrak{K}^0$ нормально содержится в конусе $\mathfrak{K}^r$. Докажем, что конус $\mathfrak{K}^0$ правильный. Поскольку $A_1\vee A_2\leqslant A_1+A_2$ $(A_1, A_2\in\mathfrak{K}^0)$, то из нормальности конуса $\mathfrak{K}^0$ выводим, что $A_1\vee A_2\in\mathfrak{K}^0$, т. е. что $\mathfrak{K}^0$ — конечно-правильный конус. Пусть $\mathfrak{A}$ — ограниченная (в $L^r(X, Y)$) непустая совокупность операторов из $\mathfrak{K}^0$. Присоединим к $\mathfrak{A}$ точные верхние границы всех непустых конечных подмножеств этого множества. При этом не изменится точная верхняя граница множества $\mathfrak{A}$ и в силу конечной правильности конуса $\mathfrak{K}^0$ расширенное таким образом множество $\mathfrak{A}$ не выйдет за пределы конуса $\mathfrak{K}^0$. Будем поэтому считать, что уже само $\mathfrak{A}$ включает в себя точные границы всех своих непустых конечных подмножеств и, следовательно, фильтруется по возрастанию. Обозначим $A_0=\sup\mathfrak{A}$. В соответствии с предложением I из **3.4** $A_0(x)= =\sup\limits_{A\in\mathfrak{A}}A(x)$ $(x\in K)$. Возьмем какое-либо фильтрующееся по возрастанию множество $E\subset X$, имеющее точную верхнюю границу $\sup E=u$. Основываясь на определении (o)-непрерывности, будем иметь

$$A_0(u)=\sup_{A\in\mathfrak{A}}A(u)=\sup_{A\in\mathfrak{A}}(\sup A[E])=$$
$$=\sup_{x\in E}(\sup_{A\in\mathfrak{A}}A(x))=\sup A_0[E].$$

Итак $\mathfrak{K}_0$ — нормальный и правильный конус.

Будем предполагать теперь, что не только Y, но и X является K-пространством. Как и в **3.4**, заменяя операторы из $L^r(X, Y)$ их сужениями на конус K положительных элементов K-пространства X, будем считать элементы из $L^r(X, Y)$ предлинейными операторами. Сохраним также символы $\mathfrak{K}^r$ и $\mathfrak{K}^0$ для обозначения конусов положительных (соответственно положительных и (o)-непрерывных) операторов.

Если A — положительный (o)-непрерывный оператор, то, основываясь на предложении II из **3.2**, легко проверить, что его нулевой конус $\nu(A)$ будет предкомпонентой конуса K. Поэтому если для такого оператора его носитель $\operatorname{supp} A$ совпадает с нулевой предкомпонентой, то $\nu(A)=(\nu(A))^{dd}=(\operatorname{supp} A)^d=K$, т. е. $A=0$. Из сделанного замечания вытекает

II. *Если U — такой положительный оператор, что* $\operatorname{supp} U=\{0\}$[19] *и* $A\in\mathfrak{K}^0$, *то* $U\wedge A=0$.

Действительно, в силу предложения I $A_0=U\wedge A\in\mathfrak{K}^0$. Но $\operatorname{supp} A_0\subset\operatorname{supp} U=\{0\}$, так что $A_0=0$.

Можно показать, что и обратно оператор A, дизъюнктный каждому такому оператору $U\in\mathfrak{K}^r$, что $\operatorname{supp} U=\{0\}$, (o)-непрерывен.

Отметим некоторые факты, относящиеся к тому случаю, когда $Y=\mathbf{R}$, т. е. когда рассматривается пространство X^r и его компонента X^0.

III. *Для того чтобы положительные (o)-непрерывные функционалы были дизъюнктны, необходимо и достаточно, чтобы были дизъюнктны их носители.*

Достаточность условия вытекает из монотонности отображения $\Theta: f\longrightarrow\operatorname{supp} f\,(f\in\mathfrak{K}^0)$ (см. **3.4**) даже и без предположения о том, что X — K-пространство, а $Y=\mathbf{R}$.

Для доказательства необходимости рассмотрим дизъюнктные (o)-непрерывные функционалы f_1, f_2. Согласно предложению II из **3.4**, каковы бы ни были числа $\varepsilon>0$ и $x\in K$, можно найти такие последовательности $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$ элементов конуса K, что $y_n+z_n=x$, $f_1(y_n)+f_2(z_n)\leqslant\varepsilon/2^n$ $(n=1, 2, \ldots)$. Положим $u_n=y_1\vee y_2\vee\ldots\vee y_n$, $v_n=z_1\wedge z_2\wedge\ldots\wedge z_n=x-u_n\,(n=1, 2, \ldots)$. Последовательность $\{u_n\}$ — возрастающая, а $\{v_n\}$ — убывающая. Кроме того, $f_1(u_n)\leqslant\sum_{k=1}^{n} f_1(y_k)\leqslant\varepsilon$, $f_2(v_n)\leqslant f_2(z_n)\leqslant\varepsilon/2^n$ $(n=1, 2, \ldots)$. Обозначая $u=\sup u_n=\sup y_n$, $v=\inf v_n=\inf z_n=x-u$, будем иметь в силу (o)-непрерывности рассматриваемых функционалов $f_1(u)\leqslant\varepsilon$, $f_2(v)=0$. Таким образом, для любого $\varepsilon>0$ можно указать такие элементы u, $v\in K$, что $u+v=x$, $f_1(u)\leqslant\varepsilon$, $f_2(v)=0$. Тем самым можно построить последовательности $\{x_n'\}$ и $\{x_n''\}$ элементов конуса K так, что $x_n'+x_n''=x$, $f_1(x_n')\leqslant 1/n$, $f_2(x_n'')=0$. Если принять $x'=\inf x_n'$, $x''=\sup x_n''=x-x'$, то $f_1(x')=0$, т. е. $x'\in\nu(f_1)$. Так как $x_n''\in\nu(f_2)$,

[19] Это условие обозначает, что нулевой конус $\nu(U)$ оператора U представляет собой фундамент конуса K (см. **2.6**). Такого рода положительные операторы, обращающиеся в нуль на некотором фундаменте, называются *анормальными*.

а конус $\nu(f_2)$ — предкомпонента, то и $x''\in\nu(f_2)$. Таким образом, $\nu(f_1)+\nu(f_2)=\nu(f_1)\vee\nu(f_2)=K$, так что $\operatorname{supp} f_1\wedge\wedge\operatorname{supp} f_2=(\nu(f_1)\vee\nu(f_2))^d=\{0\}$.

Заметим, что в доказательстве этого факта (o)-непрерывность функционалов f_1 и f_2 использовалась не в полную меру. Достаточно было считать эти функционалы секвенциально (o)-непрерывными. Понятно, что и под X можно было подразумевать лишь K_σ-пространство.

IV. *Если f_1 и f_2 — (o)-непрерывные функционалы (не обязательно положительные), то для произвольного $x\in K$ существуют такие элементы $x', x''\in K$, что $x'+ +x''=x$ и*

$$(f_1\wedge f_2)(x)=f_1(x')+f_2(x''); \qquad (f_1\vee f_2)(x)=f_1(x'')+f_2(x').$$

Действительно, положим $f=f_1\wedge f_2$. Так как $(f_1-f)\wedge\wedge(f_2-f)=0$, то для $x\in X$ в соответствии с предложением III найдутся элементы x', x'' так, что $x'+x''=x$ и $f_1(x')=f(x')$, $f_2(x'')=f(x'')$. Тем самым $f(x)=f_1(x')+ +f_2(x'')$. Если принять $f_0=f_1\vee f_2=(f_1+f_2)-(f_1\wedge f_2)$, то $f_0(x)=f_1(x)+f_2(x)-(f_1(x')+f_2(x''))=f_1(x'')f_2(x')$.

Также с помощью предложения III может быть уточнен результат предложения III из **3.4**.

V. *Отображение $\Theta: f\longrightarrow\operatorname{supp} f$ $(f\in\mathfrak{K}^0)$ конуса $\mathfrak{K}^0$ положительных (o)-непрерывных функционалов в базу $\mathfrak{S}(X)$ K-пространства X сохраняет точные нижние границы непустых конечных множеств.*

В самом деле, если $f_1, f_2\in\mathfrak{K}^0$ и $f=f_1\wedge f_2$, то, как уже отмечалось, $\Theta(f)\subset\Theta(f_1)\cap\Theta(f_2)$. Если $x\in\Theta(f_1)\cap\Theta(f_2)\cap\nu(f)$, то в силу предложения IV найдутся такие элементы x'; $x''\in K$, что $x'+x''=x$ и $0=f(x)=f_1(x')+f_2(x'')$. Так как одновременно $x'\in\operatorname{supp} f_1$, $x''\in\operatorname{supp} f_2$, то $x'=x''=0$, а значит, и $x=0$. Это и приводит к равенству $\Theta(f)= =\Theta(f_1)\cap\Theta(f_2)$.

Если f — положительный (o)-непрерывный функционал и Λ_f — предкомпонента конуса $\mathfrak{K}^0$, порожденная элементом f, то на основании теоремы 12 (**2.0**) и предложения VII из **3.2** выводим

VI. *Булевская алгебра $\{\Lambda\in\mathfrak{S}(X^0):\Lambda\subset\Lambda_f\}$ изоморфна булевской алгебре $\{H\in\mathfrak{S}(X):H\subset\operatorname{supp} f\}$. Указанный изоморфизм осуществляется отображением, сопоставляющим предкомпоненте $\Lambda\subset\Lambda_f$ предкомпоненту $H= =\sup\limits_{g\in\Lambda}(\operatorname{supp} g)$.*

Используя результаты **0.2.11**, нетрудно также получить

VII. *База* $\mathfrak{E}(X^0)$ *K-пространства* X^0 *всех* (o)*-непрерывных функционалов изоморфна булевской алгебре* $\{H \in \mathfrak{E}(X) : H \subset \sup_{f \in \mathfrak{K}^0} (\operatorname{supp} f)\}$.

В заключение рассмотрим следующий вопрос.

Для произвольного элемента x K-пространства X положим $F_x : f \longrightarrow f(x)$ $(f \in \mathfrak{K}^r)$. Как вытекает из определения, функционал F_x — (o)-непрерывен, так что множество $\tilde{X}$ всех функционалов указанного вида содержится в K-пространстве $(X^r)^0$.

VIII. *Множество* $\tilde{X}$ *является конечно-правильным подпространством K-пространства* $(X^r)^0$. *При этом отображение* $x \longrightarrow F_x$ $(x \in X)$ *сохраняет точные границы конечных множеств.*

В самом деле, возьмем $x \in X$ и $f \in \mathfrak{K}^r$. Понятно, что $(F_x)^+(f) = \sup_{f' \in [0, f]} f'(x) \leqslant \sup_{f' \in [0, f]} f'(x^+) = f(x^+) = F_{x^+}(f)$. Обозначая через P проектор на компоненту H, порожденную элементом x^+, и полагая $f_0 = f \circ P$, ввиду очевидного соотношения $0 \leqslant f_0 \leqslant f$ получим $(F_x)^+(f) \geqslant f_0(x) = f(x^+) = F_{x^+}(f)$. Таким образом, $(F_x)^+ = F_{x^+}$. Отсюда очевидным образом и вытекают все утверждения данного предложения.

Основываясь на предложении IV, можем, следовательно, сформулировать следующий результат.

IX. *Если* x_1, x_2 — *элементы K-пространства* X, *то произвольный положительный функционал* f *можно представить в форме суммы* $f_1 + f_2$ *также положительных функционалов* f_1 *и* f_2 *так, что*

$$f(x_1 \wedge x_2) = f_1(x_1) + f_2(x_2); \quad f(x_1 \vee x_2) = f_1(x_2) + f_2(x_1).$$

Если функционал f — (o)*-непрерывен, то будут* (o)*-непрерывными и* f_1, f_2.

§ 4. РЕАЛИЗАЦИЯ ВЕКТОРНЫХ РЕШЕТОК

Чтобы сделать более обозримой ту или иную абстрактную категорию объектов, прибегают обычно к их моделированию, т. е. к построению подобных им из достаточно простых и хорошо изученных «деталей». Если речь идет о категориях функционального анализа, то в качестве традиционного набора «узлов», из которых «собираются» модели, употребляется класс разнообразных функциональных множеств. Не составляет исключения и категория упорядоченных векторных пространств и, если быть более точным, векторных решеток. В качестве универсальной шкалы стандартных пространств в этом случае фигурирует класс пространств непрерывных на хаусдорфовых компактах функций, принимающих, вообще говоря, и бесконечные значения. Каждая векторная решетка, удовлетворяющая некоторым совсем не обременительным условиям, изоморфно вкладывается в одну из решеток упомянутой шкалы.

1.4.1. Мы начнем с изложения вспомогательных фактов о функциях — элементах упомянутой шкалы пространств.

Условимся в обозначениях. Пусть D — данное множество. Под «функцией на D» в этом параграфе будем понимать отображение множества D в расширенную числовую прямую $\bar{\mathbf{R}}$. Если область значений данной функции не содержит $+\infty$ и $-\infty$, то о такой функции будем говорить как о *конечной*. В случае же, когда областью значений служит ограниченное (в числовой прямой $\bar{\mathbf{R}}$) множество, будем называть функцию *ограниченной*. Если $t \in \bar{\mathbf{R}}$ и f — функция на D, то множества

$$f^{-1}[[-\infty, t)],\ f^{-1}[[-\infty, t]],\ f^{-1}[(t, +\infty]],\ f^{-1}[[t, +\infty]]$$

называются *лебеговскими множествами* функции f. Ради краткости (и наглядности) будем обозначать их также символами $\{f<t\}$, $\{f\leqslant t\}$, $\{f>t\}$, $\{f\geqslant t\}$. Для единообразия вместо $f^{-1}[t]$ мы обычно будем писать: $\{f=t\}$.

Функция легко восстанавливается по своим лебеговским множествам. Пусть T — множество вещественных чисел и $\mathfrak{U}: t \longrightarrow U_t$ $(t \in T)$ — семейство подмножеств множества D.

I. *Чтобы существовала такая функция f на D, что*

$$\{f<t\} \subset U_t \subset \{f \leqslant t\} \quad (t \in T), \tag{1}$$

необходимо и достаточно, чтобы семейство $\mathfrak{U}$ было возрастающим.

Необходимость условия вытекает из очевидного соотношения: если $s, t \in T$ и $s<t$, то $U_s \subset \{f \leqslant s\} \subset \{f<t\} \subset U_t$.

Доказывая достаточность, для $q \in D$ положим $T_q = \{t \in T : q \in U_t\}$. Имея в виду стандартный порядок на расширенной числовой прямой, введем функцию $f: t \longrightarrow \inf T_q$ $(q \in D)$. Если семейство $\mathfrak{U}$ — возрастающее, то, как легко понять, $(f(q), +\infty] \cap T \subset T_q \subset [f(q), +\infty] \cap T$ для каждого $q \in D$. Отсюда если при некотором $t \in T$ будет $q \in \{f<t\}$, то $t \in (f(q), +\infty] \cap T \subset T_q$, так что $q \in U_t$. Подобным же образом устанавливается, что $U_t \subset \{f \leqslant t\}$ $(t \in T)$. Таким образом, функция f удовлетворяет соотношениям (1).

Функция f на D, связанная с семейством $\mathfrak{U}$ соотношениями (1), называется *урысоновской функцией семейства* $\mathfrak{U}$.

Если множество T индексов семейства $\mathfrak{U}$ недостаточно богато элементами, то, разумеется, нельзя рассчитывать на единственность урысоновской функции. Однако если T — плотно в $\overline{\mathbf{R}}$, то этого достаточно, чтобы утверждать единственность урысоновской функции.

Наряду с семейством $\mathfrak{U}$ рассмотрим еще семейство $\mathfrak{V}: s \longrightarrow V_s (s \in S)$ подмножеств множества D, где S, как и T, — множество вещественных чисел. Предполагая, что семейства $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ — возрастающие, обозначим через f и g какие-либо урысоновские функции этих семейств. Снабдим множество $\overline{\mathbf{R}}^D$ всех функций на D стандартным — покоординатным — порядком.

Лемма 1. *Если множества S и T плотны в расширенной числовой прямой $\overline{\mathbf{R}}$, то $f \geqslant g$ равносильно тому, что для каждых таких $s \in S$ и $t \in T$, что $s>t$, имеет место включение $V_s \supset U_t$.*

Доказательство. Пусть $f \geqslant g$, $s \in S$, $t \in T$ и $s>t$. На основании соотношения (1) и аналогичного соотношения для функции g имеем $V_s \supset \{g<s\} \supset \{g \leqslant t\} \supset \{f \leqslant t\} \supset U_t$.

Предположим теперь, что удовлетворены все условия леммы, и допустим, что для некоторого $q \in D$ имеет место неравенство $f(q)<g(q)$. Поскольку множества S и T плотны в $\overline{\mathbf{R}}$, найдутся такие числа $s \in S$ и $t \in T$, что $f(q)<t<s<g(q)$. Ввиду того, что по условию $U_t \subset V_s$, должно было бы быть $q \in \{f<t\} \subset U_t \subset V_s \subset \{g \leqslant s\}$, т. е. $g(q) \leqslant s<g(q)$. Этим доказано, что $f \geqslant g$.

Следствие 1. *Если в условиях леммы соблюдено кроме того, еще следующее требование: для каждых таких $s \in S$, $t \in T$,* что $s < t$, *имеет место включение* $V_s \subset U_t$, то $f = g$. *В частности, если множество индексов T семейства $\mathfrak{U}$ плотно в $\overline{\mathbf{R}}$, то урысоновская функция семейства $\mathfrak{U}$ единственна.*

Следствие 2. *Если множество индексов T возрастающего семейства $\mathfrak{U}$ плотно в $\overline{\mathbf{R}}$ и f — урысоновская функция $\mathfrak{U}$, то для любого вещественного r имеют место равенства*

$$\{f < r\} = \bigcup_{t \in T_r^-} U_t; \quad \{f \leqslant r\} = \bigcap_{t \in T_r^+} U_t. \tag{2}$$

(здесь обозначено $T_r^- = [-\infty, r] \cap T$; $T_r^+ = (r, +\infty] \cap T$ [20]).

В самом деле, положим $S = \overline{\mathbf{R}}$ и $V_s = \{f < s\}$ $(s \in S)$. Очевидно, f служит урысоновской функцией семейства $\mathfrak{V}: s \longrightarrow V_s$. Поэтому для $r \in \overline{\mathbf{R}}$ и $t \in T$ соотношение $r > t$ влечет соотношение $V_r \supset U_t$ и, стало быть, включение $V_r \supset \bigcup_{t \in T_r^-} U_t$. Но ввиду плотности множества T в $\overline{\mathbf{R}}$ имеем $[-\infty, r) = \bigcup_{t \in T_r^-} [-\infty, t]$. Значит, переходя к прообразам получаем $\{f < r\} = \bigcup_{t \in T_r^-} \{f < t\} \subset \bigcup_{t \in T_r^-} U_t$. Аналогично проверяется и второе из соотношений в (2).

Если множество D наделено структурой топологического пространства, то можно ставить вопрос о непрерывности урысоновской функции данного семейства.

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{U}: t \longrightarrow V_t$ $(t \in T)$ — возрастающее семейство множеств топологического пространства D, причем T плотно в $\overline{\mathbf{R}}$. Для непрерывности урысоновской функции f семейства $\mathfrak{U}$ необходимо и достаточно, чтобы для любых таких $s, t \in T$, что $s < t$, было бы $\overline{U}_s \subset U_t^0$.*

Доказательство. Напомним, прежде всего, что непрерывность функции f равносильна тому, что для каждого $r \in \overline{\mathbf{R}}$ множество $\{f < r\}$ открыто, а множество $\{f \leqslant r\}$ замкнуто.

---

[20] Как обычно, под пересечением пустого семейства подмножества D понимается само множество D.

Поэтому, если f непрерывна и $s<t$ $(s,\ t\in T)$, то

$$\overline{U}_s\subset\overline{\{f\leqslant s\}}=\{f\leqslant s\}\subset\{f<t\}=\{f<t\}^0\subset U_t^0. \qquad (3)$$

Предполагая теперь, что выполнены условия леммы, примем $\mathfrak{V}: t\to U_t^0$ $(t\in T)$. Если $s,\ t\in T$; $s<t$, то $U_s^0\subset U_s\subset\subset U_t$ и $U_s\subset\overline{U}_s\subset U_t^0$. Отсюда по следствию 1 леммы 1 выводим, что урысоновская функция семейства $\mathfrak{V}$ совпадает с f. Поэтому в силу (2) $\{f<r\}=\bigcup\limits_{t\in T_r^-}U_t^0$ при любом вещественном r. Таким образом, будучи объединением открытых множеств, множество $\{f<r\}$ и само открыто.

Если теперь принять $\mathfrak{W}: t\longrightarrow\overline{U}_t$, то для таких же $s,\ t\in T$, что и выше, $\overline{U}_s\subset U_t^0\subset U_t$ и $U_s\subset U_t\subset\overline{U}_t$. Поэтому f является урысоновской функцией семейства $\mathfrak{W}$ и на основании второго из соотношений (2) $\{f\leqslant r\}=\bigcap\limits_{t\in T_r^+}\overline{U}_t$ для любого $r\in\overline{\mathbf{R}}$ — множество $\{f\leqslant r\}$ замкнуто. Вместе с предыдущим это обеспечивает непрерывность функции f.

Рассмотрим подпространство D_0 топологического пространства D и возрастающее семейство $\mathfrak{U}: t\longrightarrow\overline{U}_t$ $(t\in T)$ множеств пространства D_0 (как и раньше, множество индексов T предполагается плотным в $\overline{\mathbf{R}}$).

II. *Если урысоновская функция* φ *семейства* $\mathfrak{U}$ *непрерывна, то урысоновская функция* f *семейства* $\overline{\mathfrak{U}}: t\longrightarrow\overline{U}_t$ $(t\in T)$[21] *служит распространением на* D *функции* φ.

Действительно, заметим, что урысоновской функцией семейства $\mathfrak{U}_0: t\to\overline{U}_t\cap D_0\,(t\in T)$ является сужение f_0 на множество D_0 функции f. Пусть $s,\ t\in T$ и $s<t$. Очевидно, $U_s\subset U_t\subset\overline{U}_t\cap D_0$. Так как пересечение $\overline{U}_s\cap D_0$ представляет собой замыкание в пространстве D_0 множества U_s, а функция φ непрерывна на D_0, то на основании леммы 2 получаем $\overline{U}_s\cap D_0\subset U_t$. Применение следствия 1 из леммы 1 приводит к равенству $f_0=\varphi$.

В приведенном доказательстве лемма 2, а стало быть, и непрерывность функции φ использовалась не в полной мере. Нам понадобилось лишь (в терминах лем-

[21] Под $\overline{U}_t$ подразумевается замыкание множества U_t в пространстве D.

мы 2), чтобы для любых s, $t\in T$ неравенство $s<t$ влекло включение $\overline{U}_s\subset U_t$.

Предположим, что пространство D — квазиэкстремально несвязный компакт (см. **3.2**), а D_0 — открытое (в D) множество типа F_σ. Если, как и выше, φ — непрерывная функция на D_0, то ввиду того, что при любом $t\in\mathbf{R}$ множество $\{\varphi<t\}$ открыто и типа F_σ $\left(\{\varphi<t\}=\right.$ $\left.=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{\varphi\leqslant t-\frac{1}{n}\right\}\right)$ в подпространстве D_0, а значит, как нетрудно понять, и в пространстве D, замыкание $\overline{\{\varphi<t\}}$ будет открыто-замкнутым (в пространстве D). Таким образом, если в предложении II принять $U_t=\overline{\{\varphi<t\}}$ $(t\in\mathbf{R})$, то семейство $\mathfrak{U}$ тривиальным образом удовлетворяет условиям леммы 2 и, следовательно, функция f непрерывна. Это замечание приводит к следующему предложению.

III. *Если D — квазиэкстремально несвязный компакт и D_0 плотное в D открытое множество типа F_σ, то всякая непрерывная функция на D_0 допускает единственное распространение до непрерывной функции на D.*

Для доказательства достаточно добавить к сказанному, что единственность распространения обеспечивается плотностью множества D_0.

Если в условиях предложения III компакт D экстремально несвязен, то предположение о том, что множество D_0 типа F_σ, становится, очевидно, излишним.

Возвращаясь к случаю, когда D — произвольное топологическое пространство, рассмотрим множество $\mathfrak{C}(D)$ всех непрерывных функций на D. Если снабдить множество $\mathfrak{C}(D)$ стандартным, поточечным, порядком, то, поскольку вложение $\mathfrak{C}(D)\longrightarrow\overline{\mathbf{R}}^D$ сохраняет точные границы конечных множеств, множество $\mathfrak{C}(D)$ решетка.

Рассмотрим множество $\mathfrak{E}\subset\mathfrak{C}(D)$. Допустим, что каждая функция $f\in\mathfrak{E}$ определяется как урысоновская функция возрастающего семейства $t\longrightarrow U_t(f)$ $(t\in\mathbf{R})$. Тогда если функция $g\in\mathfrak{C}(D)$ есть верхняя граница множества $\mathfrak{E}$, то, поскольку для любого $t\in\mathbf{R}$ множество $\{g<t\}$ открыто, $\{g<t\}\subset[U_t(f)]^0$ для каждой $f\in\mathfrak{E}$. Стало быть, $\{g<t\}\subset U_t=\left(\bigcap_{f\in\mathfrak{E}}[U_t(f)]^0\right)^0$. Сказанное позволяет сформулировать следующий результат.

IV. *Если урысоновская функция h возрастающего семейства $t \longrightarrow U_t$ $(t \in \mathbf{R})$, где $U_t = \left(\bigcap_{f \in \mathfrak{G}} [U_t(f)]^0 \right)^0$, непрерывна, то h служит точной верхней границей множества $\mathfrak{G}$ (относительно порядка в $\mathfrak{C}(D)$).*

Действительно, если $f \in \mathfrak{G}$, $t \in \mathbf{R}$, то $U_t \subset U_t(f)$, так что согласно лемме 1 $h \geqslant f (f \in \mathfrak{G})$, т. е. h — верхняя граница множества $\mathfrak{G}$. Если g — еще одна верхняя граница множества $\mathfrak{G}$, то, как отмечалось, $\{g < t\} \subset U_t$ при любом $t \in \mathbf{R}$. Снова применяя лемму 1, выводим отсюда, что $h = \sup \mathfrak{G}$.

Аналогично доказывается

V. *Если урысоновская функция возрастающего семейства $t \to \bigcup_{f \in \mathfrak{G}} \overline{U_t(f)}$ $(t \in \mathbf{R})$ непрерывна, то она является точной нижней границей (в $\mathfrak{C}(D)$) множества $\mathfrak{G}$.*

I.4.2. Цель настоящего пункта — описать некоторые классы векторных решеток, элементы которых суть непрерывные функции на хаусдорфовом компакте Q. По причинам, которые прояснятся несколько позднее, мы ограничимся рассмотрением лишь таких решеток, которые составлены из элементов множества $C_\infty(Q)$ — всех непрерывных функций на Q, принимающих бесконечные значения лишь на нигде не плотных в Q множествах.

Множество $X \subset C_\infty(Q)$ будем называть *векторным пространством непрерывных функций* (на Q), если в нем определена структура векторного пространства так, что для любых f, $g \in X$ и α, $\beta \in \mathbf{R}$ имеет место соотношение $(\alpha f + \beta g)(q) = \alpha f(q) + \beta g(q)$ для всех тех точек $q \in Q$, для которых правая часть имеет смысл. Поскольку множество всех таких точек содержит плотное (и открытое) множество тех $q \in Q$, в которых значения обеих функций f и g конечны, то указанным требованием структура векторного пространства в X определяется однозначно.

Отметим еще, что если f, $g \geqslant 0$ и α, $\beta > 0$, то $\alpha f(q) + \beta g(q)$ осмысленно для любой точки $q \in Q$, так что в этом случае функция $\alpha f + \beta g$ определяется обычным образом.

Если векторное пространство непрерывных функций X обладает тем свойством, что вместе с функцией f оно содержит и функцию $|f| : q \longrightarrow |f(q)|$ $(q \in Q)$, то о нем мы будем говорить как о *векторной решетке непрерыв-*

ных функций (на Q). В этом случае, снабженное стандартным порядком, пространство X действительно оказывается векторной решеткой, причем, как очевидно, вложение $X \longrightarrow \mathfrak{C}(Q)$ сохраняет точные границы конечных множеств.

Векторную решетку непрерывных функций X будем называть *нормальной*, если конус K ее положительных элементов нормально содержится в упорядоченном множестве $\mathfrak{C}^+(Q)$ всех положительных непрерывных функций на Q.

Чтобы сформулировать условия нормальности векторной решетки непрерывных функций, дадим следующее определение. Множество F компакта Q называется *чеховским*, если оно замкнуто, нигде не плотно, типа G_δ и обладает тем свойством, что любая непрерывная функция на дополнении $G=F'$ множества F допускает распространение до непрерывной функции на всем Q. Поскольку существует гомеоморфизм любого замкнутого регулярного промежутка Δ на расширенную числовую прямую $\bar{\mathrm{R}}$, то в этом определении вместо произвольных непрерывных функций на Q можно принимать во внимание только функции, значения которых лежат в фиксированном промежутке Δ, например, в промежутке $[0, 1]$.

I. *Если X — нормальная векторная решетка непрерывных функций, то какова бы ни была функция $f \in X$, множество $F=\{|f|=+\infty\}$ — чеховское.*

В самом деле, множество F, очевидно, замкнуто, нигде не плотно и типа $G_\delta\left(\{|f|=+\infty\}=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\{|f|>n\}\right)$. Дальнейшие рассуждения проведем в предположении, что $f>0$ (это не уменьшает общности, поскольку по условию $|f| \in X$). Обозначая $G=F'$, рассмотрим непрерывную функцию φ на G, принимающую значения в промежутке $[0, 1]$. Положим $F_1=\{f \leqslant 1\}$, $F_2=\{f \leqslant 2\}$. Согласно теореме Урысона существует такая непрерывная функция h на Q, что $F_1 \subset h^{-1}[0]$, $F_2 \subset h^{-1}[1]$ и $h[Q] \subset \subset [0, 1]$. Определим на G функцию $\psi: q \longrightarrow f(q) - h(q)\varphi(q)$ $(q \in G)$. Ясно, что ψ непрерывна на G и положительна. Полагая $f_0(q)=\psi(q)$, если $q \in G$ и $f_0(q)= =+\infty$ для $q \in F$, мы построим функцию f_0 на Q, которая служит **непрерывным** распространением функции ψ на весь компакт Q. Поскольку $\mathbf{0}\leqslant f_0\leqslant f$, то ввиду нормальности векторной решетки X будет $f_0\in X$. Если $g_0=f-f_0$, то для $q\in G$ будет $g_0(q)=f(q)-f_0(q)=f(q)-\psi(q)=h(q)\varphi(q)$. Так как функция g_1, совпадающая на множестве G с функцией $q\longrightarrow(1-h(q))\varphi(q)$ $(q\in G)$ и равная нулю на множестве F, непрерывна на Q и для $q\in G$, очевидно, $g_0(q)+g_1(q)=\varphi(q)$, то функция $g=g_0+g_1$ является непрерывным распространением (на Q) функции φ. Этим доказано, что множество F — чеховское.

II. *Пусть K — коническое пространство, нормально содержащееся в упорядоченном множестве $\mathfrak{C}^+(Q)$. Если функции из K обращаются в бесконечность лишь на чеховских множествах компакта Q, то существует нормальная векторная решетка непрерывных функций X такая, что множество K служит ее конусом положительных элементов, т. е. $X\cap\mathfrak{C}^+(Q)=K$.*

Действительно, положим $X=\{f\in\mathfrak{C}(Q):|f|\in K\}$. Очевидно, $X\cap\mathfrak{C}^+(Q)=K$. Введем в X структуру векторного пространства. Пусть f, $g\in X$. Множества $F_f=\{|f|=+\infty\}$ и $F_g=\{|g|=+\infty\}$ — чеховские, а так как K — коническое пространство и, стало быть, $|f|+|g|\in K$, то будет чеховским и множество $F=F_f\cup F_g=\{|f|+|g|=+\infty\}$. Поэтому функция $\varphi:g\longrightarrow f(q)+g(q)$ $(q\in F')$, будучи непрерывной функцией на F', допускает распространение до непрерывной функции h на Q. Вследствие того, что F нигде не плотно, h определяется функциями f и g однозначно. Далее, поскольку $|h(q)|\leqslant|f(q)|+|g(q)|$ для $q\in F'$, ввиду непрерывности функций f и g справедливо соотношение $|h|\leqslant|f|+|g|$. Следовательно, ввиду нормальности конического пространства K функция $|h|$ входит в K, т. е. $h\in X$. Функцию h мы и примем за сумму функций f и g. Не составляет труда проверить, что при таком определении сумма X обращается в коммутативную группу с функцией $\mathbf{0}$ в роли нейтрального элемента. Если для $f\in X$ и $\alpha\in\mathbf{R}$ принять $\alpha f:q\longrightarrow\alpha f(q)$ $(q\in Q)$, то так определенная операция умножения на скаляр вместе с введенной операцией сложения определяют в X структуру векторного пространства. Предоставляя проверку этого утверждения читателю, заметим, что, как очевидно, векторное пространство X удовлетворяет условиям определения векторного пространства непрерывных функций.

Пусть $\mathfrak{F}$ — возрастающий фильтр (в совокупности всех замкнутых типа G_δ множеств компакта Q) чеховских множеств. Множество K всех положительных непрерывных функций на Q, обращающихся в бесконечность только на множествах из фильтра $\mathfrak{F}$, удовлетворяет, очевидно, условиям предложения II и, стало быть, служит конусом положительных элементов в нормальной векторной решетке непрерывных функций X, состоящей из всех непрерывных функций на Q, обращающихся в бесконечность разве лишь на множествах из $\mathfrak{F}$. Ясно, что эта решетка — наибольшая в классе векторных решеток непрерывных функций, «множества бесконечности» которых входят в фильтр $\mathfrak{F}$.

Особый интерес представляет случай, когда каждое замкнутое нигде не плотное типа G_δ множество компакта Q — чеховское (так, например, будет, когда компакт Q квазиэкстремально несвязен; см. предложение III из **4.1'**). В этом случае, понимая под $\mathfrak{F}$ совокупность всех чеховских множеств компакта Q, мы получим в качестве соответствующей фильтру $\mathfrak{F}$ максимальной нормальной векторной решетки непрерывных функций все множество $C_\infty(Q)$.

Основываясь на предложении IV из **4.1'**, докажем

III. *Если компакт Q квазиэкстремально несвязен, то векторная решетка $C_\infty(Q)$ представляет собой K_σ-пространство. В случае, когда Q экстремально несвязен, $C_\infty(Q)$ — K-пространство.*

Действительно, пусть $\mathfrak{E}$ — непустое множество положительных функций из $C_\infty(Q)$, ограниченное в $C_\infty(Q)$. Для $f \in \mathfrak{E}$ и $t \in \mathbf{R}$ положим $U_t(f) = \{f \leqslant t\}$ и в соответствии с предложением IV из **4.1'** $U_t = \left(\bigcap\limits_{f \in \mathfrak{E}} [U_t(f)]^0\right)^0$. Так как множество $U_t(f)$ замкнуто и типа G_δ, то, если компакт Q квазиэкстремально несвязен, внутренность $[U_t(f)]^0$ открыто-замкнута. Если при этом $\mathfrak{E}$ не более чем счетно, то пересечение $\bigcap\limits_{f \in \mathfrak{E}} [U_t(f)]^0$ представляет собой замкнутое множество типа G_δ и потому его внутренность U_t открыто-замкнута. Ясно, что этот вывод сохраняет силу для произвольного множества $\mathfrak{E}$, если компакт Q предполагается экстремально несвязным. Семейство $t \longrightarrow U_t$ $(t \in \mathbf{R})$ открыто-замкнутых множеств тривиальным образом удовлетворяет условиям леммы 2 из **4.1**, так что урысоновская функция h этого семейства непрерывна. А тогда в силу предложения IV из **4.1** она служит точной верхней границей множества $\mathfrak{C}$ (в $\mathfrak{C}(Q)$). Поэтому если $g \in C_\infty(Q)$ — верхняя граница множества $\mathfrak{C}$, то должно быть $h \leqslant g$. Ввиду нормальности вложения конуса положительных элементов решетки $C_\infty(Q)$ в множество $\mathfrak{C}^+(Q)$, получаем отсюда $h \in C_\infty(Q)$ и, следовательно, $h = \sup \mathfrak{C}$ (в $C_\infty(Q)$).

I.4.3. Предполагая компакт Q экстремально несвязным, выясним некоторые свойства K-пространства $C_\infty(Q)$.

Условимся на протяжении этого пункта связывать с функцией $f \in C_\infty(Q)$ возрастающее семейство $\mathfrak{M}_f : t \longrightarrow U_t(f)$ $(t \in \mathbf{R})$ открыто-замкнутых множеств $U_t(f) = \{f \leqslant t\}^0$. Согласно предложениям IV и V из **4.1** (см. также доказательство предложения III из **4.2**), если непустое множество $\mathfrak{C} \subset C_\infty(Q)$ соответствующим образом, сверху или снизу, ограничено, то функция $\sup \mathfrak{C}$ является урысоновской функцией семейства $t \rightarrow \left(\bigcap_{f \in \mathfrak{C}} U_t(f)\right)^0$ $(t \in \mathbf{R})$, а функция $\inf \mathfrak{C}$ — урысоновской функцией семейства $t \rightarrow \overline{\bigcup_{f \in \mathfrak{C}} U_t(f)}$ $(t \in \mathbf{R})$. Заметим, что и в том и в другом случае множества, образующие указанные семейства,— открыто-замкнуты.

Пусть f — непрерывная функция на топологическом пространстве D. Множество $\operatorname{supp} f = \overline{\{f > 0\}}$ называется *носителем функции* f. Если $D = Q$ — экстремально несвязный (или хотя бы квазиэкстремально несвязный) компакт, носитель функции $f \in \mathfrak{C}(Q)$ — открыто-замкнутое множество. Заметим, что если $f, g \in \mathfrak{C}^+(Q)$, то соотношение $f \wedge g = 0$ равносильно тому, что $\operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} g = \varnothing$. Действительно, соотношение $f \wedge g = \varnothing$ означает, что открытые множества $\{f > 0\}$ и $\{g > 0\}$ не пересекаются. Но вследствие экстремальной несвязности компакта Q это имеет место в том и только в том случае, когда не имеют общих точек замыкания этих множеств.

Пусть E — открыто-замкнутое множество компакта Q. Нетрудно понять, что характеристическая функция χ_E этого множества непрерывна. Обозначим $K_\infty(Q) = C_\infty(Q) \cap \mathfrak{C}^+(Q)$.

I. *Оператор* $P_E : f \longrightarrow \chi_E \cdot f$ $(f \in K_\infty(Q))$ *является дизъюнктным проектором на предкомпоненту* $H_E = \{f \in K_\infty(Q) : \operatorname{supp} f \subset E\}$.

Действительно, оператор P_E предлинеен и для каждой функции $f \in K_\infty(Q)$ имеет место соотношение $0 \leqslant P_E(f) \leqslant f$. На основании теоремы 4 отсюда следует, что P_E будет дизъюнктным проектором на предкомпоненту $H_E = \{f \in K_\infty(Q) : P_E(f) = f\}$. Остается заметить, что для функции $f \in K_\infty(Q)$ соотношения $P_E(f) = f$ и $\operatorname{supp} f \subset E$ очевидным образом равносильны.

Обозначая через $\mathbf{1}$ функцию на Q, все значения которой равны единице, т. е. характеристическую функцию всего компакта Q, докажем предложение в известном смысле обратное по отношению к предложению I.

II. *Если* H — *предкомпонента конуса* $K_\infty(Q)$ *и* P — ***дизъюнктный проектор на нее, то*** $P(\mathbf{1})$ ***является характеристической функцией некоторого открыто-замкнутого множества*** E ***компакта*** Q. *При этом* $H = H_E$.

В самом деле, пусть P_1 — проектор на дизъюнктное дополнение H^d предкомпоненты H. Полагая $h = P(\mathbf{1})$, $h_1 = P_1(\mathbf{1})$, заключаем на основании предложения VII из **2.7**, что $h + h_1 = \mathbf{1}$. Так как $h \wedge h_1 = \mathbf{0}$, то тем самым $h \vee h_1 = \mathbf{1} - (h \wedge h_1) = \mathbf{1}$. Таким образом, для каждого $q \in Q$ имеем $h(q) \wedge h_1(q) = 0$, $h(q) \vee h_1(q) = 1$. Отсюда следует, что функция h (равно как и функция h_1) может иметь только два значения — нуль или единицу, т. е. что h служит характеристической функцией некоторого множества E пространства Q. Так как $E = \{h > 0\} = \{h \geqslant 1/2\}$, множество E — открыто-замкнуто. Поскольку $P_E(\mathbf{1}) = \chi_E = P(\mathbf{1})$, а функция $\mathbf{1}$ является единичным элементом конуса $K_\infty(Q)$, то вследствие сказанного в **0.2.10** $P_E = P$, $H = H_E$.

Обозначим через $\mathfrak{A}(Q)$ булевскую алгебру всех открыто-замкнутых множеств компакта Q. Предложения I и II приводят к следующему результату.

III. *Отображение* $E \longrightarrow H_E$ $(E \in \mathfrak{A}(Q))$ *является изоморфизмом булевской алгебры* $\mathfrak{A}(Q)$ *на базу* $\mathfrak{E}(C_\infty(Q))$ *K-пространства* $C_\infty(Q)$.

Отметим еще одно важное свойство K-пространства $C_\infty(Q)$.

IV. *Всякое множество* $\mathfrak{E}$ *положительных попарно дизъюнктных элементов K-пространства* $C_\infty(Q)$ *ограничено.*

В самом деле, для $t \in \mathbf{R}$ положим $U_t = \left(\bigcap_{f \in \mathfrak{S}} U_t(f)\right)^0 = \inf_{f \in \mathfrak{S}} U_t(f)$ (здесь и ниже имеются в виду точные границы в полной булевской алгебре $\mathfrak{A}(Q)$). Как отмечалось в начале пункта, урысоновская функция h семейства $t \longrightarrow U_t$ $(t \in \mathbf{R})$ служит точной верхней границей множества $\mathfrak{S}$ (в $\mathfrak{S}(Q)$). На основании предложения II из **4.1'** можем написать:

$$\{h > 0\} = \bigcup_{t>0} U_t', \quad \{f > 0\} = \bigcup_{t>0} \overline{\{f > t\}},$$

так что

$$\operatorname{supp} h = \overline{\{h > 0\}} = \overline{\bigcup_{t>0} U_t'} = \sup_{t>0} U_t' = \sup_{t>0}\left(\sup_{f \in \mathfrak{S}} \overline{\{f > t\}}\right) =$$
$$= \sup_{f \in \mathfrak{S}}\left(\sup_{t>0} \overline{\{f > t\}}\right) = \sup_{f \in \mathfrak{S}}(\operatorname{supp} f).$$

Учитывая дистрибутивность булевской алгебры, получаем отсюда

$$\overline{\{h < +\infty\}} \cap \operatorname{supp} h = \left(\sup_{t>0} U_t\right) \cap \left(\sup_{f \in \mathfrak{S}} (\operatorname{supp} f)\right) =$$
$$= \sup_{t>0, f \in \mathfrak{S}} (U_t \cap \operatorname{supp} f) = \sup_{t>0, f \in \mathfrak{S}} \left(\operatorname{supp} f \cap \inf_{g \in \mathfrak{S}} U_t(g)\right). \quad (4)$$

Но если $f, g \in \mathfrak{S}$ и $f \neq g$, то ввиду дизъюнктности элементов f и g будет $\operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} g = \varnothing$, т. е. для $t \in (0, +\infty)$ будет $U_t(g) \supset \{g = 0\}^0 = (\operatorname{supp} g)' \supset \operatorname{supp} f$. Принимая это во внимание, получаем $\inf_{g \in \mathfrak{S}} (\operatorname{supp} f \cap U_t(g)) = U_t(f) \cap \operatorname{supp} f$.

Это позволяет продолжить цепочку равенств (4):

$$\overline{\{h < +\infty\}} \cap \operatorname{supp} h = \sup_{t>0, f \in \mathfrak{S}} (U_t(f) \cap \operatorname{supp} f) =$$
$$= \sup_{f \in \mathfrak{S}} \left[\operatorname{supp} f \cap \sup_{t>0} U_t(f)\right] = \sup_{f \in \mathfrak{S}} \left[\operatorname{supp} f \cap \overline{\{f < +\infty\}}\right] =$$
$$= \sup_{f \in \mathfrak{S}} (\operatorname{supp} f) = \operatorname{supp} h.$$

Таким образом, $\overline{\{h < +\infty\}} \supset \operatorname{supp} h$. Поскольку $(\operatorname{supp} h)' \subset \{h = 0\} \subset \overline{\{h < +\infty\}}$, то $Q = \operatorname{supp} h \cup (\operatorname{supp} h)' \subset \subset \overline{\{h < +\infty\}}$, так что множество $\{h = +\infty\}$ нигде не плотно или, иными словами, $h \in C_\infty(Q)$. Следовательно, множество $\mathfrak{C}$ ограничено в $C_\infty(Q)$.

Если K-пространство обладает тем свойством, что всякое множество положительных попарно дизъюнктных элементов в нем ограничено, то о таком K-пространстве говорят, что оно *расширенное*. Предложение IV можно, следовательно, сформулировать кратко так: K-пространство $C_\infty(Q)$ — расширенное.

Рассмотрим полную булевскую алгебру $\mathfrak{B}$. Понимая под Q ее стоуновский компакт и учитывая, что алгебра $\mathfrak{B}$ изоморфна алгебре $\mathfrak{B}(Q)$ (см. **0.2.8**), можем высказать основной результат этого пункта.

Теорема 7(4.I). *Пусть $\mathfrak{B}$ — полная булевская алгебра и Q — ее стоуновский компакт. Упорядоченное векторное пространство $C_\infty(Q)$ является расширенным K-пространством, база которого изоморфна алгебре $\mathfrak{B}$.*

1.4.4. Представление векторных решеток в виде решеток непрерывных функций начнем с простейшего случая — векторных решеток ограниченных элементов (см. **2.7**).

Итак, пусть X — векторная решетка ограниченных элементов с сильной единицей. **1**. Оставляя в стороне случай, когда X состоит из единственного элемента, докажем

I. *Если конусом, состоящим из единственного нулевого элемента, исчерпываются все собственные нормальные конуса векторной решетки X, то X — одномерна, т. е. для каждого элемента $x \in X$ можно указать такой скаляр α, что $x = \alpha\mathbf{1}$.*

Действительно, поскольку по условию решетка X архимедова (совокупность всех положительных неархимедовых элементов образует собственный нормальный конус), то каноническая полунорма $p : x \longrightarrow \inf\{\alpha \in \mathbf{R} : |x| \leqslant \alpha\mathbf{1}\}$ $(x \in X)$ будет нормой. Возьмем в X положительный элемент x и положим $\nu = p(x)$. Как отмечалось в **2.7**, $\nu\mathbf{1} - x \geqslant 0$. Если $\nu\mathbf{1} - x > 0$, то нормальный конус $N_{\nu\mathbf{1}-x}$, порожденный элементом $\nu\mathbf{1} - x$ (по поводу обозначений см. **2.6**), совпадает с конусом K положительных элементов решетки X, и потому можно указать такой строго положительный скаляр ε, что $\varepsilon\mathbf{1} \leqslant \nu\mathbf{1} - x$, так что $x \leqslant (\nu - \varepsilon)\mathbf{1}$, что противоречит равенству $p(x) = \nu$. Итак, $x = \nu\mathbf{1}$. Если x — произвольный элемент решетки X, то $x = x^+ - x^- = (\nu_1 - \nu_2)\mathbf{1}$, где $\nu_1 = p(x^+)$, $\nu_2 = p(x^-)$.

Рассмотрим гельфандовский компакт Q векторной решетки X (см. **2.7**).

II. *Каков бы ни был максимальный нормальный конус q векторной решетки X — точка компакта Q, существует единственный линейный положительный функционал ε_q на X такой, что $\varepsilon_q(\mathbf{1})=1$, $\varepsilon_q^{-1}[0]=X_q=q\dot{-}q$. Функционал ε_q при этом сохраняет точные границы конечных множеств.*

В самом деле, так как q — нормальный конус, то его линейная оболочка $X_q=q-q$ — нормальное подпространство. Фактор-пространство $\overline{X}_q=X/X_q$ согласно предложению III из **2.7** так же, как и X, будет векторной решеткой ограниченных элементов (с сильной единицей $\mathbf{1}_q=\varphi_q(\mathbf{1})$, где под φ_q подразумевается канонический гомоморфизм решетки X на фактор-пространство $\overline{X}_q$). Используя максимальность конуса q, нетрудно показать, что векторная решетка $\overline{X}_q$ удовлетворяет условиям предложения I, т. е. что единственным ее собственным нормальным конусом является нулевой конус. Таким образом, фактор-пространство одномерно. Иначе говоря, подпространство X_q имеет коразмерность, равную единице. Поэтому подпространство X_q служит ядром некоторого линейного функционала ε_q. Поскольку $\mathbf{1}\overline{\in}X_q$, указанный функционал можно выбрать так, чтобы было $\varepsilon_q(\mathbf{1})=1$. Этим условием он определяется однозначно. Так как произвольный элемент $x\in X$ можно представить в форме $x=\varepsilon_q(x)\mathbf{1}+x'$, где $x'\in\varepsilon_q^{-1}[0]=X_q$, то $\varphi_q(x)=\varepsilon_q(x)\mathbf{1}_q$. Отсюда вытекает положительность функционала ε_q и утверждение о том, что он сохраняет точные границы конечных множеств (см. теорему 2).

Рассмотрим произвольный элемент x векторной решетки X и определим на Q функцию $f_x: q\longmapsto\varepsilon_q(x)$ $(q\in Q)$. Используя принятые в **2.6** и **2.7** обозначения, можем сформулировать следующее предложение.

III. *Пусть $x\in X$, $t\in\mathbf{R}$. Имеют место соотношения*

$$\begin{aligned}\{f_x\leqslant t\}&=F_{[(x-t\mathbf{1})^+]}=\{q\in Q:(x-t\mathbf{1})^+\in q\};\\ \{f_x\geqslant t\}&=F_{[(x-t\mathbf{1})^-]}=\{q\in Q:(x-t\mathbf{1})^-\in q\}.\end{aligned}\tag{5}$$

Действительно, включение $q\in\{f_x\leqslant t\}$ в силу предложения II равносильно тому, что $0=(f_x(q)-t)^+=$

$=(\varepsilon_q(x)-t)^+=\varepsilon_q((x-t\mathbf{1})^+)$, т. е. тому, что $(x-t\mathbf{1})^+\in X_q$. А это ввиду положительности элемента $(x-t\mathbf{1})^+$ равносильно включению $(x-t\mathbf{1})^+\in q$. Аналогично доказывается и второе равенство (5).

Согласно предложению V из **2.7**, если $s<t$ ($s, t\in\mathbf{R}$), то множество $F_{[(x-t\mathbf{1})^+]}$ является окрестностью множества $F_{[(x-s\mathbf{1})^+]}$. Поэтому, так как множество $F_{[(x-s\mathbf{1})^+]}$ замкнуто, семейство $t\to F_{[(x-t\mathbf{1})^+]}$ ($t\in\mathbf{R}$) удовлетворяет условиям леммы 2 из **4.1**. Это приводит к утверждению

IV. *Каков бы ни был элемент x векторной решетки ограниченных элементов X, функция f_x непрерывна на Q.*

Прежде чем формулировать основной результат настоящего пункта, относящийся к отображению $x\longrightarrow f_x$ ($x\in X$), докажем еще два факта.

V. *Каков бы ни был элемент $x\in X$, имеет место равенство $p(x)=\|f_x\|=\sup\limits_{q\in Q}|f_x(q)|$. В частности, $f_x=0$ тогда и только тогда, когда x — неархимедов элемент решетки X.*

В самом деле, поскольку $f_{|x|}=|f_x|$, $p(|x|)=p(x)$ и $\||f_x|\|=\|f_x\|$, можно считать элемент x положительным. Обозначим через N_0 совокупность всех положительных неархимедовых элементов решетки X. Согласно предложению IV из **2.7** $N_0=p^{-1}[0]\cap K=\bigcap\limits_{q\in Q}q$, где K — конус положительных элементов решетки X. Поэтому если $\nu=\|f_x\|$, то, поскольку $\{f_x\leqslant\nu\}=Q$, вследствие (5) будем иметь $(x-\nu\mathbf{1})^+\in N_0$. Тем самым, учитывая, что $x\leqslant\nu\mathbf{1}+(x-\nu\mathbf{1})^+$, можем написать: $p(x)\leqslant\nu+p((x-\nu\mathbf{1})^+)=\nu$. Вывод обратного неравенства не составляет труда.

VI. *Пусть положительная непрерывная функция f на Q, точка $q_0\in Q$, ее окрестность V и положительное число t таковы, что $f(q)>t$ для любой точки $q\in V$. Тогда можно указать такие окрестность V_0 точки q_0 и положительный элемент $z\in X$, что $f_z\leqslant f$, $f_z(q)>t$ ($q\in V_0$).*

В самом деле, согласно предложению VI из **2.7** найдется такой элемент $x\in q_0$ и такое строго положительное число α, что $V_0=F_{[(x-\alpha_1)^+]}\subset V$. Множество V_0 замкнуто, поэтому $t_0=\inf f[V_0]>t$. Понятно, что можно считать, что $\alpha\leqslant t_0$. Положим $y=(x-\alpha\mathbf{1})^-$. На основании предложения II $f_y(q)=(f_x(q)-\alpha)^-\leqslant\alpha$ ($q\in Q$). Если, кроме того, $q \in V_0'$, то в силу (5) будет $f_y(q)=0$. Наконец ясно, что $f_y(q_0)=\alpha$. Учитывая все сказанное, легко понять, что элемент $z=(t_0/\alpha)y$ искомый: если $q \in V_0$, то $f_z(q) \leqslant t_0 \leqslant f(q)$. В случае же $q \in V_0'$ имеем $f_z(q) = 0 \leqslant f(q)$.

Теперь мы в состоянии доказать следующий фундаментальный результат, известный под названием *теоремы* братьев *Крейнов — Какутани.*

Теорема 8(4.I). *Отображение* $U: x \longrightarrow f_x$ $(x \in X)$ *векторной решетки ограниченных элементов* X *в векторную решетку* C_Q *всех непрерывных (конечных) функций на гельфандовском компакте* Q *решетки* X *обладает свойствами:*

(1) U *— линейный положительный оператор;* $U1$: $: q \longrightarrow 1$ $(q \in Q)$;

(2) *ядро* $U^{-1}[0]$ *оператора* U *совпадает с нормальным подпространством* X_0 *всех неархимедовых элементов решетки* X;

(3) *отображение* U *сохраняет точные границы произвольных множеств;*

(4) *область значений оператора* U *плотна в пространстве* C_Q *(в топологии, определяемой в* C_Q *чебышёвской нормой).*

Доказательство. Свойство (1) вытекает из линейности и положительности каждого из функционалов ε_q $(q \in Q)$. Утверждение пункта (2) является следствием предложения V.

Докажем, что U сохраняет точные границы произвольных множеств. То, что U сохраняет точные границы конечных множеств, есть следствие предложения II. Имея в виду общий случай, достаточно рассмотреть множество $E \subset X$, которое имеет точную нижнюю границу, равную нулевому элементу решетки X, и убедиться, что $\inf U[E]=0$. Пусть f — положительная нижняя граница множества $U[E]$. Предположим, что в Q имеется такая точка q_0, что $f(q_0)>0$. Тогда множество $\{f>0\}$ будет окрестностью точки q_0 и, приняв в предложении VI $t=0$, можно будет найти такой положительный элемент $z \in X$, что $f_z \leqslant f$ и $f_z(q_0)>0$. Так как $f \leqslant f_x$ для каждого $x \in E$, то $f_{(z-x)^+} = (f_z - f_x)^+ = 0$. Поэтому на основании предложения V элемент $(z-x)^+$ — неархимедов. Но тогда для любого $x \in E$ будет $(z-x)^+ \leqslant \varepsilon 1$, где обозначено $\varepsilon=1/2 f_z(q_0)$. Таким образом, $z=x+(z-x)^+-(z-x)^-\leqslant x+\varepsilon\mathbf{1}$ для каждого $x\in E$. Значит, $z\leqslant\leqslant\inf E+\varepsilon\mathbf{1}=\varepsilon\mathbf{1}$ и, следовательно, $f_z(q_0)\leqslant\varepsilon$, что, очевидно, невозможно. Тем самым единственная положительная нижняя граница (в C_Q) множества $U[E]$ есть функция, все значения которой равны нулю, т. е. $\inf U[E]=\mathbf{0}$.

Убедимся, наконец, в справедливости последнего утверждения теоремы. Для этого докажем, что, каковы бы ни были функция $f\in C_Q$ и число $\varepsilon>0$, в X найдется такой элемент x, что $f-\varepsilon f_1\leqslant f_x\leqslant f$. Понятно, что при этом можно ограничиться рассмотрением только таких функций f, что $f\geqslant\varepsilon f_1$. Возьмем точку $q\in Q$. Полагая $t_q=f(q)-\varepsilon/2$ и замечая, что множество $\{f>t_q\}\cap\{f<t_q+\varepsilon\}$ является окрестностью точки q, найдем на основании предложения VI такой положительный элемент $z_q\in X$ и такую окрестность $V_q\subset\{f>t_q\}\cap\{f<t_q+\varepsilon\}$, что $f_{z_q}\leqslant f$ и $f_{z_q}(s)>t_q$ $(s\in V_q)$. Поскольку $\bigcup\limits_{q\in Q} V_q=Q$, можно указать такое конечное множество $S\subset Q$, что $\bigcup\limits_{q\in S} V_q=Q$. Примем $x=\sup\limits_{q\in S} z_q$. Тогда $f_x=\sup\limits_{q\in S} f_{z_q}\leqslant f$. Далее, если $s\in Q$, то при некотором $q\in S$, окажется $s\in V_q$ и, стало быть, $f_x(s)\geqslant f_{z_q}(s)>t_q>f(s)-\varepsilon$.

Теорема полностью доказана.

Следствие 1. *Если X — такая архимедова решетка ограниченных элементов, что нормированное пространство (X, p) — полно, то оператор U осуществляет изоморфизм решетки X на решетку C_Q и равным образом изоморфизм нормированного пространства (X, p) на нормированное пространство C_Q.*

Для доказательства второй части утверждения надо воспользоваться предложением V.

В качестве другого следствия теоремы Крейнов — Какутани укажем на известную *теорему Стоуна — Вейерштрасса.*

Следствие 2. *Если X — векторная решетка непрерывных конечных функций на хаусдорфовом компакте Q, включающая функцию, все значения которой равны единице, и разделяющая точки компакта Q: для любых различных точек q_1, $q_2\in Q$ существует такая функция $x\in X$, что $x(q_1)\neq x(q_2)$, то множество X плотно (по норме) в пространстве C_Q.*

Для доказательства достаточно заметить, что гельфандовский компакт решетки X гомеоморфен компакту Q (ср. **2.8**). Если отождествить его с Q, то, поскольку $\varepsilon_q(x)=x(q)$ $(q\in Q)$, для любой функции $x\in X$ будет $f_x=x$.

Рассмотрим вполне регулярное топологическое пространство T и за X примем решетку C_T всех непрерывных ограниченных функций на T (см. **2,8**). Отождествим в соответствии с предложением III из **2,8** пространство T с подпространством чеховской компактификации βT — точку $\tau\in T$ с максимальным нормальным конусом $q_\tau = \{x\in C_T^+ : x(\tau)=0\}$.

VII. *Всякая функция из C_T допускает распространение до функции из $C_{\beta T}$.*

Действительно, если $x\in C_T$ и $q\in T$, то $f_x(q)=\varepsilon_q(x)=x(q)$.

Поскольку множество $\beta T\setminus T$ может и не быть замкнутым множеством типа G_δ, нельзя сказать, что оно чеховское.

В заключение докажем следующий полезный в дальнейшем результат.

VIII. *Пусть Q — хаусдорфов компакт и A — такой положительный оператор из C_Q в себя, что $A\leqslant I$, где I — тождественное отображение пространства C_Q на себя. Тогда функции $f\in C_Q$ и $g=A(f)$ связаны соотношением $g(q)=\varphi(q)\cdot f(q)$ $(q\in Q)$, где $\varphi=A(\mathbf{1})$, а $\mathbf{1}$ — функция, все значения которой равны единице.*

В самом деле, для $q\in Q$ введем функционал $\lambda_q=\varepsilon_q\circ A$. Если $f(q)=\varepsilon_q(f)=0$, то $|\lambda_q(f)|=|\varepsilon_q(A(f))|\leqslant\varepsilon_q(|f|)=0$. Значит, $\varepsilon_q^{-1}[0]\subset\lambda_q^{-1}[0]$. Тем самым найдется такой скаляр α_q, что $\lambda_q=\alpha_q\varepsilon_q$. Если $f\in C_Q$ и $g=A(f)$, то $g(q)=\lambda_q(f)=\alpha_q\cdot f(q)$ $(q\in Q)$. В частности, если $f=\mathbf{1}$ и $g=\varphi$, то $\varphi(q)=\alpha_q$ $(q\in Q)$.

Относительно дальнейших свойств таких операторов **II,2,3**.

I.4.5. Результаты предыдущего пункта могут быть распространены на более или менее произвольные векторные решетки.

Будем под X подразумевать архимедову векторную решетку, конус K положительных элементов которой имеет единичный фильтр (см. **0.2.9**). Обозначим через $\mathbf{1}$ какой-либо элемент этого фильтра. Согласно определению элемент $\mathbf{1}$ обладает тем свойством, что порожденная им предкомпонента $\{1\}^{dd}$ конуса K совпадает с K. В решетке X выделим нормальное подпространство X — всех элементов, ограниченных относительно $\mathbf{1}$. Понятно, что X_1 — векторная решетка ограниченных элементов (с $\mathbf{1}$ в роли сильной единицы). Пусть Q — гельфандовский компакт решетки X_1 (в дальнейшем, помня о зависимости компакта Q_1 от выбора единицы, мы будем все-таки писать вместо Q_1 просто Q). Применяя к решетке X_1 предложение II из 4,4, для каждого $q \in Q$ определим на решетке X функционал ε_q. Наша задача заключается в распространении каждого такого функционала (с сохранением основных его свойств) на всю решетку X. Сначала предпримем распространение на конус K.

Итак, фиксируя $q \in Q$, возьмем произвольный элемент $x \in K$. Рассмотрим семейство $\{x_t\}$ $(t \in \mathbf{R}^+)$, где $x_t = x \wedge (t\mathbf{1})$. Поскольку при любом $t \in \mathbf{R}^+$ элемент x_t входит в решетку X_1, имеет смысл значение $\varepsilon_q(x_t)$. Понятно, что числовое семейство $\{\varepsilon_q(x_t)\}$ $(t \in \mathbf{R}^+)$ — возрастающее. Положим $\delta_q(x) = \sup\limits_{t \in \mathbf{R}^+} \varepsilon_q(x_t) = \lim\limits_{t \to \infty} \varepsilon_q(x_t)$. Если $x \in X_1$, то при достаточно большом $\alpha \in \mathbf{R}^+$ будет $x \leqslant \alpha\mathbf{1}$. Поэтому если $t \geqslant \alpha$, то $x_t = x$ и, следовательно, $\delta_q(x) = \varepsilon_q(x)$.

I. *Если $x, y \in K$, то* $\delta_q(x \vee y) = \delta_q(x) \vee \delta_q(y)$, $\delta_q(x \wedge y) = \delta_q(x) \wedge \delta_q(y)$.

В самом деле, так как $(x \vee y) \wedge (t\mathbf{1}) = (x \wedge (t\mathbf{1})) \vee \vee (y \wedge (t\mathbf{1}))$, то в силу предложения II из 4,4 $\varepsilon_q((x \vee y) \wedge \wedge (t\mathbf{1})) = \varepsilon_q(x \wedge (t\mathbf{1})) \vee \varepsilon_q(y \wedge (t\mathbf{1}))$. Переход к пределу приводит к первому из доказываемых равенств. Проверка второго аналогична.

II. *Если x, $y \in K$, α, $\beta \in \mathbf{R}^+$, то* $\delta_q(\alpha x + \beta y) = \alpha\delta_q(x) + \beta\delta_q(y)$.

В самом деле, если $t \in \mathbf{R}^+$, то

$$(x \wedge (t\mathbf{1})) + (y \wedge (t\mathbf{1})) = (x+y) \wedge (x + t\mathbf{1}) \wedge (y + t\mathbf{1}) \wedge \\ \wedge (2t\mathbf{1}) \geqslant (x+y) \wedge (t\mathbf{1}). \qquad (6)$$

Отсюда с помощью предельного перехода получаем неравенство $\delta_q(x) + \delta_q(y) \geqslant \delta_q(x+y)$. Поскольку на основании (6) $(x+y) \wedge (2t\mathbf{1}) \leqslant (x \wedge (t\mathbf{1})) + (y \wedge (t\mathbf{1}))$, то справедливо и неравенство $\delta_q(x+y) \leqslant \delta_q(x) + \delta_q(y)$.

Проверим теперь, что $\delta_q(\alpha x) = \alpha\delta_q(x)$. Исключая тривиальный случай $\alpha = 0$, имеем в виду соотношения

$(\alpha x)\wedge(t\mathbf{1})=\alpha[x\wedge(t/\alpha)\mathbf{1}]$, что $\varepsilon_q((\alpha x)\wedge(t\mathbf{1}))=\alpha\varepsilon_q(x\wedge\wedge[(t/\alpha)\mathbf{1}])$. Требуемое равенство получается отсюда предельным переходом.

Пусть теперь x — произвольный элемент решетки X. В силу предложения I $\delta_q(x^+)\wedge\delta_q(x^-)=\delta_q(x^+\wedge x^-)=0$, так что по крайней мере одно из чисел $\delta_q(x^+)$ или $\delta_q(x^-)$ равно нулю. Тем самым разность $\delta_q(x^+)-\delta_q(x^-)$ имеет смысл. По определению положим $\delta_q(x)=\delta_q(x^+)-\delta_q(x^-)$. Понятно, что для $x\in X_1$ будет $\delta_q(x)=\varepsilon_q(x)$.

Пусть элементы $x\in X$, u, $v\in K$ связаны соотношением $x=v-u$. Предполагая, что разность $\delta_q(v)-\delta_q(u)$ имеет смысл, докажем, что она совпадает с $\delta_q(x)$. Действительно, считая для определенности, что $\delta_q(x)\geqslant 0$, будем иметь по определению $\delta_q(x)=\delta_q(x^+)$, $\delta_q(x^-)=0$. Так как $x^++u=x^-+v$, то в силу предложения II $\delta_q(x^+)+\delta_q(u)=\delta_q(x^-)+\delta_q(v)=\delta_q(v)$. Отсюда следует, что $\delta_q(u)<+\infty$ (иначе и $\delta_q(v)=+\infty$), и в случае, когда $\delta_q(v)=+\infty$, будет $\delta_q(x)=\delta_q(x^+)=+\infty=\delta_q(v)-\delta_q(u)$. Случай $\delta_q(v)<<+\infty$ не нуждается в особом рассмотрении.

III. *Функционал $\delta_q\colon x\longrightarrow\delta_q(x)$ $(x\in X)$ сохраняет точные границы конечных множеств и линеен в том смысле, что $\delta_q(\alpha x+\beta y)=\alpha\delta_q(x)+\beta\delta_q(y)$ для любых таких x, $y\in X$ и α, $\beta\in\mathbf{R}$, для которых осмыслена правая часть этого соотношения.*

Действительно, пусть x, $y\in X$. Так как $(x\vee y)^+=(x^+)\vee(y^+)$ и $(x\vee y)^-=(x^-)\wedge(y^-)$, то на основании предложения I $\delta_q((x\vee y)^+)=\delta_q(x^+)\vee\delta_q(y^+)$; $\delta_q((x\vee y)^-)=\delta_q(x^-)\wedge\delta_q(y^-)$. Если, например, $\delta_q((x\vee y)^-)=0$, то, стало быть, одно из чисел $\delta_q(x^-)$ или $\delta_q(y^-)$ (для определенности будем считать, что $\delta_q(x^-)$) также равно нулю. Поэтому

$$\delta_q(x\vee y)=\delta_q((x\vee y)^+)=\delta_q(x^+)\vee\delta_q(y^+)=$$
$$=\delta_q(x)\vee\delta_q(y^+)=\delta_q(x)\vee\delta_q(y).$$

В том же порядке доказывается, что $\delta_q(x\wedge y)=\delta_q(x)\wedge\wedge\delta_q(y)$.

Будем теперь под x и y подразумевать такие элементы из X, что имеет смысл сумма $\delta_q(x)+\delta_q(y)$. Так как $z=x+y=v-u$, где $v=x^++y^+$, $u=x^-+y^-$, и равенство $\delta_q(v)=\delta_q(u)=+\infty$ возможное лишь в двух случаях: $\delta_q(x)=\delta_q(x^+)=\delta_q(y^-)=-\delta_q(y)=+\infty$ или $\delta_q(y)=$

$=\delta_q(y^+)=\delta_q(x^-)=-\delta_q(x)=+\infty$, исключено предположением об осмысленности суммы $\delta_q(x)+\delta_q(y)$, то в силу предложения II

$$\delta_q(z)=\delta_q(v)-\delta_q(u)=(\delta_q(x^+)+\delta_q(y^+))-$$
$$-(-\delta_q(x^-)+\delta_q(y^-)).$$

Но из четырех слагаемых в правой части два равны нулю, а другие два совпадают с $\delta_q(x)$ и $\delta_q(y)$ соответственно. Таким образом, $\delta_q(x+y)=\delta_q(x)+\delta_q(y)$.

Замечая, что непосредственно из определения вытекает равенство $\delta_q(-x)=-\delta_q(x)$ $(x\in X)$ и, следовательно, в сочетании с предложением II — равенство $\delta_q(\alpha x)=\alpha\delta_q(x)$ $(x\in X,\ \alpha\in\mathbf{R})$, завершаем доказательство.

До сих пор мы никак не использовали предположения о том, что решетка X — архимедова, а $\mathbf{1}$ — единичный элемент конуса K. Сейчас и эти условия вступают в игру.

Подобно тому, как это было сделано в **4.4**, для $x\in X$ определим на Q функцию $f_x\colon q\longrightarrow\delta_q(x)$ $(q\in Q)$. Заметим, что если $x\in X_1$, то $f_x(q)=\delta_q(x)=\varepsilon_q(x)$, т. е. в этом случае f_x тождественна также обозначенной функции, введенной в **4.4**.

IV. *Если для некоторого $u\in X$ все значения функции f_u положительны, то $u\geqslant\mathbf{0}$.*

Каков бы ни был элемент $x\in X$, функция f_x непрерывна на Q и множество $\{|f_x|=+\infty\}$ нигде не плотно в Q.

Действительно, на основании предложения III $f_{u^-}(q)=0$ для каждого $q\in Q$, так что и $f_{(u^-\wedge\mathbf{1})}(q)=0$ $(q\in Q)$. Поскольку решетка X_1 — архимедова, а элемент $u^-\wedge\mathbf{1}\in X_1$, на основании предложения V из **4.4** $u^-\wedge\mathbf{1}=\mathbf{0}$, т. е. ввиду того, что $\mathbf{1}$ — единичный элемент, $u^-=\mathbf{0}$ иначе говоря, $u=u^+\geqslant\mathbf{0}$.

Пусть теперь x — произвольный элемент решетки X и $t\in\mathbf{R}$. Учитывая, что все значения функции f_1 равны единице и, следовательно, конечны, получим на основании предложения III

$$\{f_x\leqslant t\}=\{f_{(x-t1)^+}=0\}=\{f_{(x-t1)^+\wedge 1}=0\};$$
$$\{f_x\geqslant t\}=\{f_{(x-t1)^-}=0\}=\{f_{(x-t1)^-\wedge 1}=0\}.$$

Следовательно (см. **4.4**, равенства (5)),

$$\{f_x\leqslant t\}=F_{[(x-t1)^+\wedge 1]};\quad \{f_x\geqslant t\}=F_{[(x-t1)^-\wedge 1]}.$$

Таким образом, множества $\{f_x \leqslant t\}$ и $\{f_x \geqslant t\}$ замкнуты, а это равносильно (см. **4.1**) непрерывности на Q функции f.

Рассмотрим, наконец, множество $F = \{|f_x| = +\infty\} = \{f_{|x|} = +\infty\}$. Пусть $q_0 \in F^0$. На основании теоремы Урысона найдется такая конечная положительная непрерывная функция f на Q, что $f(q_0) > 0$ и $f(q) = 0$ для $q \in F' = \{f_{|x|} < +\infty\}$. Учитывая результат предложения VI из **4,4**, можем считать, что $f = f_z$, где z — некоторый положительный элемент из подпространства X_1. Поскольку для любого строго положительного числа ε будет $f_{(\varepsilon|x|-z)}(q) = \varepsilon f_{|x|}(q) - f_z(q) \geqslant 0$ для каждого $q \in Q$, то по доказанному $z \leqslant \varepsilon|x|$. Снова используя архимедовость решетки X, заключаем отсюда, что $z = \mathbf{0}$. Это, однако, противоречит соотношению $f_z(q_0) > 0$. Следовательно, $F^0 = \varnothing$ — множество F нигде не плотно.

В силу только что доказанного предложения отображение $U: x \longrightarrow f_x$ $(x \in X)$ представляет собой отображение решетки X в множество $\mathfrak{C}(Q)$. На основании этого же предложения U взаимно-однозначно, а ввиду предложения III сохраняет точные границы конечных множеств. Можно, однако, доказать, что

V. *Отображение U сохраняет точные границы произвольных множеств.*

Действительно, пусть множество $E \subset X$ имеет точную верхнюю границу: $u = \sup E$. Обозначим через g какую-либо верхнюю границу множества $U[E]$ (в $\mathfrak{C}(Q)$) и предположим, что в Q имеется такая точка q_0, что $g(q_0) < f_u(q_0)$. Полагая $g_0 = g \wedge f_u$, подберем такое строго положительное число ε, что $g(q_0) + \varepsilon = g_0(q_0) + \varepsilon < f_u(q_0)$, и образуем множество $G = \{q \in Q : g_0(q) + \varepsilon < f_u(q)\}$. Множество G открыто и потому служит окрестностью точки q_0. Следовательно, по теореме Урысона существует такая непрерывная функция h на Q, что $h(q_0) > 0$, $h(q) = 0$ для $q \in G'$ и $h[Q] \subset [0, \varepsilon]$. Согласно предложению VI из **4.4** можно найти такой элемент $z \in X_1$, что $\mathbf{0} \leqslant f_z \leqslant h$, $f_z(q_0) > 0$. Поскольку $f_{x+z}(q) = f_x(q) + f_z(q) \leqslant g_0(q) + h(q) \leqslant f_u(q)$ для любых $x \in E$ и $q \in Q$, в силу предложения IV $x + z \leqslant u$, так что $z \leqslant \mathbf{0}$. Таким образом, $g \geqslant f_u$, т. е. функция f_u является точной верхней границей (в $\mathfrak{C}(Q)$) множества $U[E]$. В этом же порядке идей доказывается, что U сохраняет точные нижние границы произвольных множеств.

Обозначим через $\mathfrak{C}(Q;\ X)$ область значений отображения U. Согласно предложению IV $\mathfrak{C}(Q;\ X) \subset C_\infty(Q)$, а на основании теоремы 8 $\mathfrak{C}(Q;\ X)$ включает в себя множество, плотное в нормированном пространстве C_Q. Взаимная однозначность отображения U позволяет ввести в $\mathfrak{C}(Q;\ X)$ структуру векторного пространства: по определению полагаем

$$\alpha f + \beta g = U(\alpha U^{-1}(f) + \beta U^{-1}(g)) \qquad (f,\ g \in \mathfrak{C}(Q;\ X);\ \alpha,\ \beta \in \mathbf{R}).$$

С помощью предложений IV и III устанавливается, что при этом $\mathfrak{C}(Q;\ X)$ становится векторной решеткой непрерывных функций на Q (см. **4**,2). Из самого определения вытекает, что U осуществляет изоморфизм данной решетки X на решетку $\mathfrak{C}(Q;\ X)$.

Таким образом, можно высказать следующий результат.

VI. *Векторная решетка X изоморфна векторной решетке $\mathfrak{C}(Q;\ X)$ всех функций вида $f_x (x \in X)$. Изоморфизм U указанных решеток обладает теми свойствами, что $U(\mathbf{1})$ есть функция, все значения которой равны единице, и образ $U[X_1]$ плотен в нормированном пространстве C_Q.*

Пусть u — положительный элемент решетки X. Понимая под X_u нормальное подпространство решетки X состоящее из всех элементов $x \in X$, ограниченных относительно u, и замечая, что X_u — векторная решетка ограниченных элементов (с сильной единицей u), снабдим X_u канонической нормой p_u. Если при каждом $u \in K$ нормированное пространство $(X_u,\ p_u)$ полное, то данную решетку X мы будем называть *борнологической* (или равномерно-полной). В дополнение к предложению IV докажем

VII. *Если данная решетка X — борнологическая, то, каков бы ни был элемент $z \in X$, множество $\{|f_z| = +\infty\} = F$ — чеховское.*

В самом деле, положим $u = |z|$. Тогда $F = \{f_u = +\infty\}$. Множество $V_n = \{f_u > n\}$ $(n = 1,\ 2,\ \ldots)$ служит окрестностью множества F. При этом $\overline{V_{n+1}} \subset \{f_u \geqslant n+1\} \subset V_n$ $(n = 1,\ 2,\ \ldots)$ и $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$. Для каждого $n = 1,\ 2, \ldots$

построим непрерывную со значениями в промежутке $[0, 1]$ функцию h_n так, чтобы $V_{n+1} \subset h_n^{-1}[0]$, $V'_n \subset h_n^{-1}[1]$. Рассмотрим непрерывную функцию φ на множестве $G = F' = \{f_u < +\infty\}$, все значения которой также лежат в промежутке $[0, 1]$. Полагая $\varphi_n : q \longrightarrow h_n(q)\varphi(q)$ $(q \in Q)$, получим непрерывную функцию φ_n на G. Поскольку $\varphi_n(q) = 0$ для $q \in V_{n+1} \cap G$, то φ_n допускает распространение до непрерывной и ограниченной функции на всем Q. Так как нормированное пространство (X_1, p_1) — полное, это означает, что в X_1 существует такой (положительный) элемент x_n, что $f_{x_n}(q) = \varphi_n(q)$ $(q \in Q;\ n = 1, 2, \ldots)$. Пусть m и n — натуральные числа. Считая для определенности $m \geqslant n$, для точек $q \in (V_{m+1} \cup V'_n) \cap G$ имеем

$$f_{|x_m - x_n|}(q) = |f_{x_m}(q) - f_{x_n}(q)| = |\varphi_m(q) - \varphi_n(q)| = 0.$$

Если же $q \in (V'_{m+1} \cap V_n) \cap G$, то

$$f_{|x_m - x_n|}(q) = |f_{x_m}(q) - f_{x_n}(q)| = \\ = |\varphi_m(q) - \varphi_n(q)| \leqslant 2 \leqslant (2/n) f_u(q).$$

Таким образом, $f_{|x_m - x_n|}(q) \leqslant (2/n) f_u(q)$ для всех $q \in Q$. Отсюда с учетом предложения IV выводим: $|x_m - x_n| \leqslant (2/n) u$. Поскольку можно считать, что $1 \leqslant u$ (иначе можно заменить u на $u \vee 1$) ввиду предполагаемой полноты нормированного пространства (X_u, p_u) заключаем, что в X_u существует элемент x, к которому сходится (по норме p_u) последовательность $\{x_n\} : \lambda_n = p_u(x_n - x) \longrightarrow 0$. Так как для $q \in G$ будет $\lambda_n f_u(q) \longrightarrow 0$, то для этих q справедливо равенство $f_x(q) = \lim\limits_{n \to \infty} f_{x_n}(q) = \lim\limits_{n \to \infty} \varphi_n(q) = \varphi(q)$. Значит, функция f_x является распространением функции φ. Остается заметить, что множество F нигде не плотно, замкнуто и типа G_δ.

Если компакт Q метризуем, то, как нетрудно показать, в нем нет непустых чеховских множеств. Поэтому борнологическая решетка X в этом случае совпадает с X_1 и, следовательно, по теореме 8 изоморфна решетке C_Q. Но метризуемость компакта Q, как известно, равносильна сепарабельности нормированного пространства

C_Q и, стало быть, на основании предложения V из **4.4** сепарабельности нормированного пространства (X_1, p_1). Таким образом, борнологическая векторная решетка X с сепарабельным в указанном смысле пространством X_1 совпадает с X_1.

Требование борнологичности векторной решетки X необходимо для нормальности векторной решетки $\mathfrak{C}(Q; X)$.

VIII. *Если векторная решетка $\mathfrak{C}(Q; X)$ непрерывных функций нормальна, то X — борнологическая векторная решетка.*

В самом деле, пусть u — какой-либо элемент конуса K и $\{x_n\}$ — сходящаяся в себе последовательность элементов подпространства X_u. Множество $G=\{f_u<+\infty\}$, снабженное индуцированной из Q топологией, представляет собой локально компактное пространство, и так как последовательность $\{\varphi_n\}$ непрерывных функций на G $(\varphi_n : q \to f_{x_n}(q) - (q \in Q);\ n=1, 2, \ldots)$ равномерно сходится на каждом содержащемся в G компакте, то функция $\varphi : q \longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(q)$ $(q\in G)$ непрерывна на G. Множество $\{f_u=+\infty\}$ — чеховское (предложение I из **4.2**). Поэтому существует непрерывная функция f на Q, совпадающая на G с функцией φ. Последовательность $\{x_n\}$ ограничена в пространстве X_u и тем более в решетке X. Так как, кроме того, $f(q)=\varphi(q)=\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(q)=\lim\limits_{n\to\infty} f_{x_n}(q)$ для $q\in G$, то для некоторой функции $h\in\mathfrak{C}(Q; X)$ будет $|f|\leqslant h$. Ввиду нормальности решетки $\mathfrak{C}(Q; X)$ можно указать, следовательно, такой элемент $x\in X$, что $f=f_x$. Для $q\in G$ имеет место

$$f_{|x_n-x|}(q)=|f_{x_n}(q)-f_x(q)|\leqslant\left(\sup_m p_u(x_n-x_m)\right)f_u(q).$$

По условию $\lambda_n=\sup\limits_m p_u(x_n-x_m)\longrightarrow 0$. Так как функции $f_{|x_n-x|}$ и f_u непрерывны, то $|x_n-x|\leqslant\lambda_n u$, т. е. $x_n\longrightarrow x$ в нормированном пространстве X_u.

Будучи необходимой в силу доказанного предложения для нормальности решетки $\mathfrak{C}(Q; X)$, борнологичность данной решетки X недостаточна для этого. Можно показать, однако, что условие: каков бы ни был единичный $e\geqslant 1$ элемент конуса K, гельфандовский компакт Q_e подпространства X_e гомеоморфен компакту Q, вместе с борнологичностью решетки X представляет собой уже необходимое и достаточное условие нормальности решетки $\mathfrak{C}(Q; X)$.

Отметим один, хотя и частный, но весьма важный случай, когда нормальность решетки $\mathfrak{C}(Q; X)$ удается доказать непосредственно.

IX. *Если векторная решетка X представляет собой K_σ-пространство, то изоморфная ей векторная решетка $\mathfrak{C}$ $(Q; X)$ непрерывных функций оказывается фундаментом K_σ-пространства $C_\infty(Q)$* (см. **4.2**).

Докажем сначала, что $\mathfrak{C}(Q; X) \supset C_Q$. Пусть $f \in C_Q$. Согласно теореме 8 найдется такая последовательность $\{x_u\}$ элементов подпространства X_1, что $f-(1/n)f_1 \leqslant f_{x_n} \leqslant f$ $(n=1, 2, \ldots)$. Ясно, что последовательность $\{x_n\}$ ограничена (даже в X_1). Поэтому, так как X — K_σ-пространство, существует $x = \sup\limits_n x_n$. Введем функцию $\varphi: q \to \sup\limits_n f_{x_n}(q)$ $(q \in Q)$. Очевидно, $\varphi(q) \leqslant f_x(q)$ $(q \in Q)$, однако множество $G = \{q \in Q: \varphi(q) = f_x(q)\}$ плотно в Q (см. **4.2**). Но на множестве G функции f и f_x совпадают. Будучи непрерывными, эти функции тождественны: $f = f_x \in \mathfrak{C}(Q; X)$.

Подразумевая под u произвольный положительный элемент K_σ-пространства X, рассмотрим такую непрерывную функцию f на Q, что $0 \leqslant f \leqslant f_u$. Так как функция $f_n = f \wedge (f_{n1})$ $(n=1, 2, \ldots)$ конечна, то по доказанному $f_n \in \mathfrak{C}(Q; X)$. Пусть $x_n \in X$ таков, что $f_n = f_{x_n} (n=1, 2, \ldots)$. На основании предложения IV $0 \leqslant x_n \leqslant u$ $(n=1, 2, \ldots)$. Если через x обозначить $\sup\limits_n x_n$, то в силу предложения V $f_x \leqslant f$. Вместе с тем $f(q) = \sup\limits_n f_n(q) \leqslant f_x(q)$ для каждого $q \in Q$. Следовательно, $f = f_n \mathfrak{G}(Q;\ X)$ — решетка $\mathfrak{C}(Q; X)$ — нормальна.

Так как $\mathfrak{C}(Q; X) \supset C_Q$, а C_Q, как очевидно, фундамент K_σ-пространства $C_\infty(Q)$, то тем более и $\mathfrak{C}(Q; X)$ будет фундаментом пространства $C_\infty(Q)$.

Заметим, что в условиях предложения IX нет необходимости заранее предполагать, что решетка X — архимедова. В силу предложения III из **3.1** K_σ-пространство всегда обладает этим свойством. Если X — не только K_σ-, но и K-пространство, то оказывается излишним и условие существования в конусе K единичного фильтра. Это вытекает из следующей леммы.

Лемма. *Всякое K-пространство изоморфно фундаменту K-пространства, конус положительных элементов которого имеет единичный фильтр.*

Доказательство. Множество в K-пространстве X будем называть D-множеством, если все его элементы положительны и попарно дизъюнктны. Поскольку совокупность $\mathfrak{S}$ всех D-множеств удовлетворяет, очевидно, условиям леммы Цорна и $\varnothing\in\mathfrak{S}$, существует по крайней мере одно максимальное D-множество Λ. Порожденная им предкомпонента Λ^{dd} конуса K положительных элементов K-пространства X совпадает с K: в противном случае предкомпонента Λ^{d} содержит отличный от нулевого элемент x, и объединение $\Lambda\cup\{x\}$ будет D-множеством, более широким, чем Λ.

Пусть $\lambda\in\Lambda$. Обозначим через H_λ предкомпоненту $\{\lambda\}^{dd}$, через X_λ — компоненту $H_\lambda-H_\lambda$ и через P_λ — дизъюнктный проектор на компоненту X_λ. Заметим, что поскольку наименьшей компонентой, содержащей все компоненты X_λ $(\lambda\in\Lambda)$, является все пространство X, то для любого $x\in K$ будет $x=\sup\limits_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda(x)$.

Положим $\mathfrak{X}=\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$. Нетрудно видеть, что конус $\mathfrak{K}=\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda$ K-пространства $\mathfrak{X}$ имеет единичный фильтр: отображение $\psi_0:\lambda\longrightarrow\lambda$ $(\lambda\in\Lambda)$ будет, как легко понять, единичным элементом конуса $\mathfrak{K}$. Для $x\in X$ примем $\varphi_x:\lambda\longrightarrow\longmapsto P_\lambda(x)$ $(\lambda\in\Lambda)$. Понятно, что отображение $\Phi: x\longrightarrow\varphi_x$ $(x\in X)$ K-пространства X в K-пространство $\mathfrak{X}$ линейно, положительно и сохраняет точные границы (см. **0,2,10**). Если для некоторого $x\in X$ и каждого $\lambda\in\Lambda$ имеет место равенство $P_\lambda(x)=0$, как отмечалось, $|x|=\sup\limits_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda(|x|)=0$ — отображение Φ — взаимно-однозначно. Убедимся, что образ $\Phi[K]$ — нормальный конус в $\mathfrak{X}$. Пусть $\varphi\in\Phi[K]$ и $\psi\in\mathfrak{K}$ таковы, что $\psi\leqslant\varphi$. Если $x=\Phi^{-1}(\varphi)$, то, поскольку $\psi(\lambda)\leqslant\varphi(\lambda)=P_\lambda(x)\leqslant x$ $(\lambda\in\Lambda)$, существует точная верхняя граница $y=\sup\psi[\Lambda]$. Так как элементы множества Λ попарно дизъюнктны, то

$$P_\mu(y)=\sup_{\lambda\in\Lambda} P_\mu(\psi(\lambda))=P_\mu(\psi(\mu))=\psi(\mu)\quad(\mu\in\Lambda).$$

Следовательно, $\psi=\varphi_v\in\Phi[K]$. Осталось доказать, что $\Phi[K]$ — фундамент конуса $\mathfrak{K}$. Это вытекает из того, что соотношение $\varphi\in[\Phi[K]]^d$ равносильно равенству $P_\lambda(\varphi(\lambda))=0$, из которого следует, что $\varphi(\lambda)=\mathbf{0}$ $(\lambda\in\Lambda)$.

Так как любая векторная решетка имеет базу, изоморфную базе какого-либо ее фундамента, то с помощью леммы получаем из предложения IX основную *теорему о реализации K-пространств.*

Теорема 9(4.1). *Пусть X — K-пространство и Q — стоуновский компакт его базы $\mathfrak{E}(X)$. Существует линейный взаимно-однозначный оператор U, осуществляющий изоморфизм K-пространства X и некоторого фундамента $\mathfrak{E}(Q;\ X)$ K-пространства $C_\infty(Q)$. Если при этом конус положительных элементов K-пространства X имеет единичный элемент* $\mathbf{1}$, *то изоморфизм U может быть выбран так, что все значения функции $U(\mathbf{1})$ будут равны единице.*

Для доказательства достаточно заметить, что на основании предложения V из **3.2** гельфандовский компакт K-пространства ограниченных элементов гомеоморфен стоуновскому компакту базы этого K-пространства.

Замечание. Отметим, предоставляя доказательство читателю, что если в условиях теоремы X — расширенное K-пространство, то оно изоморфно всему K-пространству $C_\infty(Q)$.

Глава II

ВЫПУКЛЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Пусть Y — векторное пространство, $G : Y \longrightarrow \mathbf{R}$ — выпуклая функция. С функцией G связаны ее *субдифференциал в точке* y^*, т. е. множество

$$\partial_{y^*}(G) = \{l \in L(Y, \mathbf{R}) : l(y) - l(y^*) \leqslant \\ \leqslant G(y) - G(y^*)\ (y \in Y)\},$$

и *преобразование Юнга* $G^* : L(Y, \mathbf{R}) \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$, определенное соотношением

$$G^*(l) = \sup_{y \in Y}(l(y) - G(y)).$$

Субдифференциалы и преобразования Юнга играют ключевые роли в теории экстремальных задач. Причины этого бросаются в глаза. В самом деле, ясно, что субдифференциал есть аналог дифференциала для случая негладкой функции. При этом как в гладком, так и в негладком случае выполняется *критерий оптимальности Ферма*

$$\mathbf{0} \in \partial_{y^*}(G) \Leftrightarrow G(y^*) = \inf\{G(y) : y \in Y\}.$$

Столь же понятно и место преобразования Юнга, поскольку величина $-G^*(l)$ представляет собой значение экстремальной задачи

$$y \in Y, \quad G(y) - l(y) \longrightarrow \inf.$$

В частности, $-G^*(\mathbf{0}) = \inf\{G(y) : y \in Y\}$.

Вследствие сказанного становится очевидной обоснованность одной из центральных задач локального выпуклого анализа, являющейся главной темой данной главы, — задачи нахождения правил вычисления субдифференциалов и преобразований Юнга сложных выпуклых функций. Сразу видно, что адекватная постановка этой задачи, т. е. задачи описания субдифференциала суперпозиции $\partial_{x^*}(G \circ F)$ или преобразования Юнга $(G \circ F)^*$ для отображения $F: X \longrightarrow Y$, требует разумного расширения понятий и по меньшей мере наличия в Y отношения порядка, согласованного с векторной структурой. Таким образом, возникает потребность в аппарате локального исследования выпуклых операторов, действующих в произвольные упорядоченные векторные пространства. Изложение такого аппарата и составляет основное содержание настоящей главы.

Следует отметить, что построение субдифференциального исчисления для достаточно общих операторов требует отказа от стандартных геометрических схем выпуклого анализа, так как рассуждения, основанные на функциональной отделимости, в принципе непригодны, скажем, для операторов, действующих в пространство всех измеримых функций. Точнее говоря, полезное в ряде случаев сопоставление выпуклому оператору $F: X \longrightarrow Y$ семейства выпуклых функций $l \circ F: X \longrightarrow \mathbf{R}$, где l — положительный функционал на Y, вряд ли может считаться универсальным методом анализа просто потому, что единственным таким функционалом будет $l=0$.

В этой связи мы взяли за основу иной, чисто аналитический подход, базирующийся на теории пространств Канторовича. Именно, оказывается, что, с технической точки зрения, существенно «нелинейных» выпуклых операторов не так уж много. Более точно, с каждой мощностью и каждым K-пространством можно связать лишь один сублинейный оператор — канонический оператор. При этом все остальные сублинейные операторы представляются суперпозициями канонического оператора с линейными. Примерно так же дело обстоит и для выпуклых операторов. Таким образом, все вопросы исчисления субдифференциалов сводятся к обсчету одного просто устроенного оператора. На этой основе дается решение задачи о субдифференциале суперпозиции выпуклых операторов во внутренних точках областей определения. Иначе говоря, выводится одна универсальная формула, играющая ту же роль, что цепное правило вычисления дифференциалов гладких функций.

Сложнее дело обстоит для субдифференциалов в граничных точках. Здесь приходится применять более частные соображения, основанные на теореме Мазура — Орлича. Все же важнейшие для приложений формулы Моро — Рокфеллера, Дубовицкого — Милютина, Гольштейна и декомпозиции находят свои полные операторные аналоги. С помощью этих формул удается получить как основные правила замены переменных в преобразовании Юнга — формулы Моро, Иоффе — Тихомирова и минимакса, так и принципиально новые факты, например правило вычисления $(A \circ F)^*$, где A — положительный линейный оператор.

Развитый аппарат исчисления затем применяется к обоснованию принципа Лагранжа для экстремальных задач. При этом изложение ограничивается выпуклыми программами. Другими словами, никакие новые идеи относительно линеаризации операторных уравнений не обсуждаются. Ту же мысль, разумеется, можно выразить и иначе: к рассматриваемым задачам можно добавлять операторную связь в форме равенства, накладывая классические условия регулярности, обеспечивающие применимость теоремы Люстерника и теоремы Банаха о гомоморфизме. Гораздо важнее подчеркнуть, что на избранном нами пути уже нет необходимости ограничиваться числовой областью значений функции цели. Оказывается, что теория программирования в полном объеме сохраняется для векторных («многоцелевых») задач, т. е. для программ, где цель $F: X \longrightarrow Y$ есть оператор, действующий в K-пространство Y.

Вопрос о векторных программах является в настоящее время одним из наиболее актуальных и, во всяком случае, наиболее остро дискуссионным в теории и практике экстремальных задач. Дело в том, что несмотря на очевидную невозможность добиться одновременного оптимума по многим противоречивым показателям, стремление к этой идеальной цели — объективный факт. Основным приемом анализа векторных программ является выбор «эрзац-цели» или «принципа согласования интересов», т. е. функции $G: Y \longrightarrow \mathbf{R}$ с последующим переходом к стандартной числовой программе с целью $G \circ F$. На этом пути возникают важнейшие правила оптимального выбора параметров — принцип эффективности Парето, игровой принцип минимакса и др. Излагаемый аппарат обслуживает, конечно, и эту методику. В то же время мы сочли возможным сделать большее — обосновать все формы принципа Лагранжа (двойственность, субдифференциальные критерии решения, критерии обобщенного решения) для задач с векторной целью F (и тем самым, разумеется, для цели $G \circ F$). Проявляя необходимую осторожность, отметим, что дело не просто в том, что различать цели F и $G \circ F$ с технической точки зрения не нужно, а в том, что значение задачи — $\inf F[U]$, где U — допустимое множество исследуемой программы, является точкой отсчета как для ряда принципов согласования интересов, так и для численных процедур решения.

В заключение отметим, что в дальнейшем нам удобно в некоторых местах допускать расширенную трактовку упорядоченного векторного пространства. Иными словами, к рассмотрению допускаются векторные пространства Y с выделенным конусом Y^+, порождающим соответствие $\sigma = \{(x, y) \in Y^2 : y - x \in Y^+\}$, удовлетворяющее условиям $\sigma \supset I_Y$ и $\sigma \circ \sigma \subset \sigma$, т. е. являющееся *предпорядком*. При этом, как и ранее, конус $Y^+ = \sigma[0]$ называется конусом положительных элементов.

§ 1. ТЕОРЕМА ХАНА — БАНАХА — КАНТОРОВИЧА

Основной целью текущего параграфа будет доказательство теоремы Хана — Банаха — Канторовича о возможности мажорированного продолжения линейного оператора, действующего в произвольное K-пространство. Эта теорема играет фундаментальную роль в ряде разделов анализа и его приложений. В частности, именно на ней основываются все методы исследования выпуклых и сублинейных операторов и методы теории выпуклых экстремальных задач.

II.1.1. Начнем с изложения вспомогательных определений и постановки основных задач теории выпуклых операторов.

Пусть X — векторное пространство, Y — некоторое упорядоченное векторное пространство. Присоединим к пространству Y наибольший элемент $+\infty$ (точнее обозначать такой элемент символом $+\infty_Y$, однако сокращенная запись нигде не вызовет недоразумений). Удобно считать, что $y+(+\infty)=+\infty$ и $\alpha(+\infty)=+\infty$ для любых $y\in Y\cup\{+\infty\}$ и положительных скаляров α.

Отображение $F:X\to Y\cup\{+\infty\}$ называется *выпуклым оператором*, если для любых векторов x_1, $x_2\in X$ и скаляров α_1, $\alpha_2\geqslant 0$ таких, что $\alpha_1+\alpha_2=1$, выполняется *неравенство Иенсена*

$$F(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)\leqslant\alpha_1Fx_1+\alpha_2Fx_2.$$

Непосредственно проверяется, что множество $\operatorname{dom}(F)$, заданное следующим образом:

$$\operatorname{dom}(F)=\{x\in X:Fx<+\infty\},$$

является выпуклым. Это множество называется *эффективным множеством оператора* F. В приложениях часто удобно трактовать выпуклый оператор $F:X\to Y\cup\{+\infty\}$ как отображение $F:X\longrightarrow Y$, определенное на выпуклом множестве $\operatorname{dom}(F)$ и удовлетворяющее на нем неравенствам Иенсена.

Пусть теперь Z — еще одно упорядоченное векторное пространство и G — некоторое отображение из Y в $Z\cup\{+\infty\}$. В дальнейшем, не оговаривая этого особо, мы всегда будем считать, что G распространено до отображения $Y\cup\{+\infty\}$ в $Z\cup\{+\infty\}$ правилом $G(+\infty)=$ $=+\infty$.

I. *Пусть* $F:X\to Y\cup\{+\infty\}$ — *выпуклый оператор и* $G:Y\to Z\cup\{+\infty\}$ — *возрастающий выпуклый оператор. Тогда оператор* $G\circ F:X\to Z\cup\{+\infty\}$ *также является выпуклым.*

Это очевидное предложение дает удобный способ формирования выпуклых операторов. В частности, если $F_1,\ldots,F_n:X\to Y\cup\{+\infty\}$ — выпуклые операторы, то операторы

$$x\longrightarrow F_1x+\ldots+F_nx;$$
$$x\longrightarrow F_1x\vee\ldots\vee F_nx$$

являются выпуклыми. Первый из этих операторов обозначается $F_1+\ldots+F_n$, а второй — $F_1\vee\ldots\vee F_n$. Подчеркнем, что если X — векторная решетка, Y — некоторое K-пространство и операторы F_1, ..., F_n линейны и регулярны, то имеет смысл говорить о точной верхней границе множества $\{F_1, \ldots, F_n\}$ в K-пространстве регулярных операторов, которая также обозначается символом $F_1 \vee \ldots \vee F_n$. Этот линейный оператор не следует путать с нелинейным оператором $F_1 \vee \ldots \vee F_n x = F_1 x \vee \ldots \vee F_n x$, несмотря на то, что для их обозначения используется один и тот же символ.

Существует еще один канонический способ построения выпуклых операторов.

II. *Пусть U — произвольное выпуклое множество в пространстве $X \times Y$. Положим*

$$\chi(U) = \{x \in X : \exists \inf\{y : (x, y) \in U\}\}.$$

Пусть, далее, U_χ — произвольное выпуклое подмножество $\chi(U)$. Определим отображение $F : X \to Y \cup \{+\infty\}$ соотношением

$$Fx = \begin{cases} \inf\{y : (x, y) \in U\}, & x \in U_\chi \\ +\infty, & x \overline{\in} U_\chi. \end{cases}$$

Тогда F — выпуклый оператор.

Возьмем $x_1, x_2 \in X$ и скаляры $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}^+$ такие, что $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Достаточно установить неравенство Иенсена лишь в том случае, когда значения Fx_1 и Fx_2 конечны. Имеем $x_1, x_2 \in U_\varkappa$ и, значит, $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in U_\varkappa$. Таким образом,

$$\alpha_1 F x_1 + \alpha_2 F x_2 = \alpha_1 \inf\{y : (x_1, y) \in U\} +$$
$$+ \alpha_2 \inf\{y : (x_2, y) \in U\} = \inf\{\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 : (x_1, y_1) \in U,$$
$$(x_2, y_2) \in U\} \geqslant \inf\{y : (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) \in U\} = F(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2).$$

Последняя оценка использует выпуклость множества U.

Замечание. Приведенные предложения дают регулярные способы построения выпуклых операторов. Отметим здесь, что в выпуклом анализе часто в качестве значений функций допускают элемент $-\infty$. На этом пути возникают так называемые несобственные функции. Введение несобственных функций или операторов (читатель сам убедится в такой возможности) упрощает некоторые формулировки простых утверждений — например, предложения II. В то же время содержательных утверждений о несобственных операторах и функциях высказать не удается. Как будет видно из дальнейшего, в этом нет и большой нужды.

В дальнейшем нам понадобятся два важных класса выпуклых операторов. Первый класс составляют простейшие положительные выпуклые операторы $F: X \to Y \cup \cup \{+\infty\}$ т. е. операторы, принимающие всего два значения $\mathbf{0}$ и $+\infty$. Эти операторы называются *индикаторными*. Последнее название объясняется тем, что индикаторный оператор F играет роль, аналогичную роли характеристической функции эффективного множества $\operatorname{dom}(F)$. Более того, каждое выпуклое множество U в X является эффективным множеством единственного индикатора, действующего в $Y \cup \{+\infty\}$. Этот оператор обозначается $\delta_Y(U)$. Таким образом,

$$\delta_Y(U)x = \begin{cases} \mathbf{0}, & x \in U \\ +\infty, & x \overline{\in} U. \end{cases}$$

С помощью индикаторов образуют срезки выпуклых операторов. Именно, если $F: X \to Y \cup \{+\infty\}$ — выпуклый оператор и U — выпуклое подмножество эффективного множества $\operatorname{dom}(F)$, то оператор $F + \delta_Y(U)$ называют *срезкой* или *ограничением оператора* F на множество U и обозначают F_U. Таким образом,

$$F_U x = \begin{cases} Fx, & x \in U \\ +\infty, & x \overline{\in} U. \end{cases}$$

Второй класс выпуклых операторов составляют сублинейные операторы, с которыми мы уже встречались в предыдущей главе. Сублинейные операторы являются важнейшим классом выпуклых операторов. Более того, как мы увидим ниже, изучение основных вопросов теории выпуклых операторов, как правило, сводится к анализу аналогичных вопросов для сублинейных операторов. Приведем формальное определение.

Выпуклый оператор $P: X \to Y \cup \{+\infty\}$ называется *сублинейным*, если он является положительно однородным. Отметим, что эффективным множеством сублинейного оператора является конус. Несложно проверить эквивалентность приведенного определения следующему.

Оператор $P: X \to Y \cup \{+\infty\}$ называется сублинейным, если выполняются соотношения

$$P(\alpha x) = \alpha Px \quad (\alpha \geqslant 0,\ x \in X);$$

$$P(x_1 + x_2) \leqslant Px_1 + Px_2 \quad (x_1,\ x_2 \in X).$$

В дальнейшем мы будем допускать вольность речи и сохранять название сублинейный оператор лишь за таким оператором P, у которого $\mathrm{dom}(P) = X$. Произвольный же сублинейный оператор P, как правило, будет называться *сублинейным оператором, определенным на конусе* $\mathrm{dom}(P)$.

Важнейшую роль в теории выпуклых операторов играет понятие субдифференциала.

Пусть $F: X \to Y \cup \{+\infty\}$ — выпуклый оператор и $L(X, Y)$, как обычно, множество линейных операторов, действующих из X в Y. *Субдифференциалом оператора F в точке x^** из эффективного множества $\mathrm{dom}(F)$ называется следующее множество:

$$\partial_{x^*}(F) = \{A \in L(X, Y): Ax - Ax^* \leqslant Fx - Fx^* \ (x \in X)\}.$$

Элементы субдифференциала часто называют *субградиентами* оператора F в точке x^*.

Если P — сублинейный оператор, то его субдифференциал в нуле называется *опорным множеством* оператора P и обозначается $\partial(P)$. Таким образом,

$$\partial(P) = \{A \in L(X, Y): Ax \leqslant Px \quad (x \in X)\}.$$

Элементы опорного множества называются *опорными операторами.* Аналогичные понятия имеют смысл и для определенного на конусе сублинейного оператора. В последнем случае говорят также и об операторах, опорных на конусе.

Субдифференциалы выпуклых операторов обобщают на случай недифференцируемых (выпуклых) отображений понятие дифференциала. В этой связи становится очевидной та роль, которую могут играть (и, как мы увидим ниже, играют) субдифференциалы в различных задачах анализа. Не менее понятны и вопросы, возникающие в связи с понятием субдифференциала. Необходимо уметь выяснять условия существования субградиентов — непустоту субдифференциала, необходимо знать, в какой мере субдифференциал определяет поведение исходного отображения и, наконец, надо уметь находить субдифференциалы конкретных операторов. Многие из этих вопросов в случае произвольных упорядоченных векторных пространств являются неисследованными (по-видимому, в связи с их безнадежной сложностью — ведь теория произвольных упорядоченных пространств до сих пор не слишком богата содержательными результатами). Иначе дело обстоит для упорядоченных векторных пространств, обладающих наиболее квалифицированной структурой порядка,— для пространств Канторовича удается строить вполне законченную и, безусловно, удовлетворительную для приложений теорию выпуклых операторов. Хорошие возможности предоставляют и векторные решетки ограниченных элементов. Счастливым (и далеко не случайным) обстоятельством является тот факт, что классические пространства анализа обладают указанными замечательными структурными свойствами.

Основным аппаратом исследования выпуклых операторов являются теоремы о квалифицированном продолжении линейных операторов, и прежде всего теорема Хана — Банаха — Канторовича. Именно этими теоремами мы сейчас и займемся.

II.1:2. Прежде всего, мы установим *теорему Канторовича* о продолжении положительного оператора.

Теорема 1(1.II). *Пусть Y — некоторое K-пространство. Каковы бы ни были упорядоченное векторное пространство X и коинициальное подпространство X_0 в X любой положительный оператор $A_0: X_0 \longrightarrow Y$ допускает положительное продолжение $A: X \longrightarrow Y$.*

Доказательство. Предположим сначала, что X_0 — гиперподпространство в X. Иными словами, пусть для некоторого элемента $x' \in X \setminus X_0$ справедливо представление

$$X = \{x_0 + \alpha x' : x_0 \in X_0, \quad \alpha \in \mathbf{R}\}.$$

Пусть $U_{x'} = \{x_0 \in X_0 : x_0 \leqslant x'\}$. Множество $U_{x'}$ по условию не пусто и, кроме того, ограничено сверху некоторым элементом из X_0. Таким образом, существует точная верхняя граница y' множества $A_0[U_{x'}]$. Определим оператор $A: X \longrightarrow Y$ соотношением

$$A(x_0+\alpha x')=A_0x_0+\alpha y'.$$

Очевидно, что последнее соотношение корректно определяет линейный оператор, действующий из X в Y и совпадающий с A_0 на подпространстве X_0. Установим положительность этого оператора.

Если $x_0+\alpha x' \geqslant \mathbf{0}$ и $\alpha=0$, то $A(x_0+\alpha x')=A_0x_0 \geqslant \mathbf{0}$. Если же $\alpha>0$, то $-x_0/\alpha \in U_{x'}$, т. е. $y' \geqslant -A_0x_0/\alpha$. Отсюда вытекает, что $A(x_0+\alpha x') \geqslant \mathbf{0}$. Если же известно, что $\alpha<0$, то $x' \leqslant x_0/|\alpha|$, т. е. $y' \leqslant -A_0x_0/\alpha$ и вновь $A(x_0+\alpha') \geqslant \mathbf{0}$.

Доказательство теоремы завершается стандартным рассуждением, основанным на лемме Цорна. Детали такого рассуждения читатель может восстановить в качестве несложного упражнения.

Замечание. Как видно, в приведенной теореме условие, что Y является K-пространством, использовалось нами не в полной мере. Именно, нам требовалось только существование точной верхней границы у ограниченного сверху множества, единственность же такой границы (которая имеет место в K-пространстве) нам была не нужна. Любопытно (и важно), что с учетом этого замечания теорема Канторовича не улучшаема. Именно, если для некоторого упорядоченного векторного пространства Y справедливо заключение теоремы Канторовича, то любое ограниченное сверху множество в Y имеет верхнюю грань. Наметим схему доказательства этого факта (аккуратное доказательство можно извлечь из более глубокого факта, который мы установим ниже в пункте 1.4).

Пусть A — ограниченное сверху множество в Y и множество B — это совокупность всех верхних границ A. Рассмотрим пространство $Y \times \mathbf{R}$, упорядоченное конусом K — конической оболочкой следующего множества

$$(Y^+ \times \{0\}) \cup (-A \times \{1\}) \cup (B \times \{-1\}).$$

Очевидно, что K индуцирует в $Y \times \{0\}$ упорядоченность, порожденную конусом $Y^+ \times \{0\}$. В силу условий существует положительный идемпотентный оператор P, действующий из $Y\times\mathbf{R}$ на $Y\times\{0\}$. Значит, ввиду того, что по определению выполняется

$$A\times\{0\}\leqslant(0,\ 1)\leqslant B\times\{0\}$$

в смысле упорядочения, наводимого конусом K, элемент $y\in Y$ такой, что $P(0,\ 1)=(y,\ 0)$, является наименьшей верхней границей множества A.

II.1:3. Установим теперь основной результат текущего параграфа — теорему Хана — Банаха — Канторовича.

Теорема Хана — Банаха — Канторовича. *Пусть Y — некоторое K-пространство. Каковы бы ни были векторное пространство X, сублинейный оператор $P:X\longrightarrow Y$, подпространство X_0 в X и линейный оператор $A_0:X_0\longrightarrow Y$ такие, что $A_0x_0\leqslant Px_0$ для всех $x_0\in X_0$, существует линейное продолжение $A:X\longrightarrow Y$ оператора A_0, обладающее тем свойством, что $Ax\leqslant Px$ для всех $x\in X$. Иными словами, справедливо представление*

$$\partial(P_{X_0})=\partial(P)+\partial(\delta_Y(X_0)).$$

Доказательство. Рассмотрим пространство $X\times Y$ и введем в него отношение порядка с помощью конуса

$$\{(x,\ y)\in X\times Y:Px\leqslant y\}.$$

Рассмотрим подпространство $X_0\times Y$ в $X\times Y$ и положим

$$\mathfrak{A}_0(x_0,\ y)=-A_0x_0+y.$$

Оператор $\mathfrak{A}_0:X_0\times Y\longrightarrow Y$ линеен и положителен, так как если $Px_0\leqslant y$, то $\mathfrak{A}_0(x_0,\ y)=-A_0x_0+y\geqslant-A_0x_0+Px_0\geqslant 0$. Кроме того, подпространство $X_0\times Y$ коинициально $X\times Y$, ибо $(x,\ y)\leqslant(0,\ P(-x)+y)$ для всех $x\in X$, $y\in Y$. Таким образом, в силу теоремы Канторовича существует положительное продолжение $\mathfrak{A}:X\times Y\longrightarrow Y$ оператора $\mathfrak{A}_0$. Положим

$$Ax=\mathfrak{A}(-x,\ 0).$$

Тогда $Ax_0=-\mathfrak{A}(x_0,\ 0)=A_0x_0$ для всех $x_0\in X_0$. Кроме того, поскольку элементы вида $(0,\cdot y)$ входят в $X_0\times Y$, то выполняется $\mathfrak{A}(0,\ y)=\mathfrak{A}_0(0,\ y)=y$. Отсюда непосредственно вытекает, что $Ax \leqslant Px$ для всех $x \in X$, что и требовалось доказать.

II.1.4. В этом пункте мы установим принадлежащее Бонайсу, Силверману и Ту обращение теоремы Хана — Банаха — Канторовича (ср. замечание в пункте **1.2**).

Теорема 2(1.II). *Пусть упорядоченное векторное пространство Y обладает тем свойством, что для любого векторного пространства X, подпространства X_0 в X и любого сублинейного оператора $P:X \longrightarrow Y$ выполняется $\partial(P_{X_0}) = \partial(P) + \partial(\delta_Y(X_0))$. Тогда каждое ограниченное сверху множество в Y имеет точную верхнюю границу.*

Доказательство. Проверка указанной теоремы — достаточно кропотливое дело. Наметим сначала основные этапы доказательства.

Этап I. Если Y удовлетворяет условиям теоремы и пересечение конуса Y^+ с некоторой прямой не замкнуто, то в Y существует двумерное лексикографически упорядоченное подпространство. Напомним, что упорядоченное векторное пространство Z с конусом положительных элементов Z^+ называется *лексикографически упорядоченным*, если $Z = Z^+ \cup (-Z^+)$.

Этап II. Если в Y есть лексикографически упорядоченное подпространство, то для Y не справедливо заключение теоремы Хана — Банаха — Канторовича.

Этап III. Если Y удовлетворяет условиям 2 и пересечение конуса Y^+ с любой прямой замкнуто, то любое ограниченное сверху множество в Y имеет точную верхнюю границу.

Наиболее трудоемким является этап II. Определенные технические трудности присутствуют и на этапе I. Дело в том, что в этих случаях необходимо проводить конкретное обследование некоторых специально построенных сублинейных операторов. Большую часть таких достаточно рутинных обсчетов мы предоставляем читателю. В частности, в качестве первого примера введем один конкретных функционал, который неоднократно будет использоваться в дальнейших построениях.

Пусть

$$Q = \{(1-t^2,\ t(2-t)) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leqslant t \leqslant 1\} \cup \{(0,\ 0)\}.$$

Определим сублинейный функционал $q:\mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ соотношением

$$q(x_1,\ x_2) = \sup\{a_1x_1 + a_2x_2 : (a_1,\ a_2) \in Q\}.$$

В дальнейшем нам удобно будет пользоваться явным видом функционала q. Именно,

$$q(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1^+ + x_2^+ - \dfrac{x_1^+ x_2^+}{x_1^+ + x_2^+}, & x_1^+ + x_2^+ > 0 \\ x_1^+ + x_2^+, & x_1^+ + x_2^+ = 0 \end{cases}.$$

Перейдем теперь непосредственно к доказательству.

Этап I. Итак, пусть в Y имеется двумерное подпространство Y_0 с незамкнутым конусом. Отождествив Y_0 и $\mathbf{R}^2$, не нарушая общности, будем считать, что упорядочение в Y_0 введено одним из следующих конусов:

$$K_1 = \{(x_1, x_2) : x_1 > 0,\ x_2 > 0\} \cup \{(0, 0)\};$$
$$K_2 = \{(x_1, x_2) : x_1 \geqslant 0,\ x_2 > 0\} \cup \{(0, 0)\};$$
$$K_3 = \{(x_1, x_2) : x_2 > 0\} \cup \{(0, 0)\}.$$

Полезно отметить, что элемент $(1, 0)$ не входит в Y^+ ни в одном из указанных случаев.

Возьмем в качестве X пространство $\mathbf{R}^3$ и пусть

$$X_0 = \{x = (x_1,\ x_2,\ x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_3 = 0\}.$$

Рассмотрим оператор $P: X \longrightarrow Y_0$, действующий по формуле

$$Px = (p_0(x),\ \ p_0(x)),$$

где полагается

$$p_0(x) = q(x_1,\ x_2) + |x_1 + x_3| + x_3.$$

В качестве оператора $A_0: X_0 \longrightarrow Y_0$ возьмем отображение

$$A_0(x_1,\ x_2,\ 0) = (x_2,\ x_1 + x_2).$$

Заметим, что при всех $x \in X_0$ выполняются соотношения

$$x_2 \leqslant p_0(x);\ x_1 + x_2 \leqslant p_0(x).$$

При этом, поскольку опорным множеством функционала p_0 служит

$$\{(a_1,\ a_2,\ 0) + (\alpha,\ 0,\ 1 + \alpha) : (a_1\ a_2) \in \mathrm{co}(Q),\qquad |\alpha| \leqslant 1\},$$

где $co(Q)$ — выпуклая оболочка Q, то единственным мажорированным продолжением функционала $(x_1, x_2, 0) \to x_2$ служит функционал $(x_1, x_2, x_3) \to x_2+x_3$. Аналогично для функционала $(x_1, x_2, 0) \to x_1+x_2$ единственным мажорированным p_0 продолжением является функционал $(x_1, x_2, x_3) \to x_1+x_2+x_3$.

Используя приведенные свойства, нетрудно убедиться, что в случае любого из конусов K_1, K_2, K_3 оператор P сублинеен и мажорирует оператор A_0 на подпространстве X_0. Пусть $A:X \to Y$ — продолжение A_0, причем $Ax \leqslant Px$ для всех $x \in X$. Можно показать, что $A[X]$ не содержится в Y_0.

Рассмотрим, например, случай конуса K_3 и допустим, что $A[X] \subset Y_0$. В этой ситуации при некотором $t \in \mathbf{R}$ выполняется

$$Ax = (x_2+tx_3, \quad x_1+x_2+x_3).$$

С другой стороны, если $t \neq 0$ и $x = (1, 0, -1)$, то

$$Px - Ax = (p_0(x)+t, \ p_0(x)) = (t, 0) \bar{\in} K_3,$$

а если $t=0$ и $x = (1, 1, -1/2)$, то

$$Px - Ax = (p_0(x) - 1, \ p_0(x) - 3/2) = (1/2, 0) \bar{\in} K_3.$$

Получается противоречие.

Таким образом, элементы

$$b_1 = A(0, 1, 0): \ b_2 = A(1, 1, -1)$$

линейно независимы в Y. Заметим теперь, что $b_1 = (1, 1)$ и, значит, $b_1 \in Y^+$. Кроме того, выполняется

$$b_2 = P(-1, 0, 1) - A(-1, 0, 1) \in Y^+;$$

$$tb_1 + (t-1)b_2 = P(1-t, \ t(t-1), \ t-1) - $$
$$- A(1-t, \ t(t-1), \ t-1) \in Y^+$$

для всех $t \leqslant 0$. Так как, кроме того, элемент $c_0 = (1, 0)$ не входит в Y^+, а в то же время $c_0 + b_2 \in Y^+$, ибо

$$c_0 + b_2 = P(0, 0, 1) - A(0, 0, 1),$$

то подпространство, натянутое на элементы b_1 и b_2, является лексикографически упорядоченным.

Этап II. Нам следует проверить, что если в Y есть лексикографически упорядоченное подпространство Y_0, то для Y несправедливо заключение теоремы Хана — Банаха — Канторовича.

Предположим сначала, что конус Y^+ является острым. Кроме того, воспользовавшись, например, леммой Цорна, будем считать, что подпространство Y_0 является максимальным по включению среди всех лексикографически упорядоченных подпространств.

Случай 1. Рассмотрим сначала случай, когда для любых u, $u_1>0$ из Y_0 таких, что $u_1<\alpha u$ для всех $\alpha>0$, множество

$$U=\{p\in Y_0 : \beta u_1<y<\alpha u \quad (\alpha,\ \beta>0)\}$$

не пусто. В этом случае, как легко видеть, в U нет максимальных элементов. Пусть B — максимальное по включению подмножество линейно независимых элементов U (при некоторых фиксированных u, u_1).

Положим $X_0=\mathscr{L}(B\cup\{u_1\})$, $X=\mathscr{L}(X_0\cup\{u\})$. Ясно, что для каждого элемента $x\in X$ существует конечное множество $\{y_1, \ldots, y_k\}\subset B$, где $y_1<y_2<\ldots<y_k$, такое, что x имеет единственное представление в следующем виде:

$$x=t_1u_1+tu+\sum_{i=1}^{k}\tau_iy_i.$$

Пусть A_0 — тождественное вложение X_0 в Y, а оператор $P:X\longrightarrow Y$ определен соотношением

$$Px=P_1x+P_2x+p_3(x)\,u,$$

где положено

$$P_1x=t_1^+u_1+\sum_{i=1}^{k-1}\tau_i^+y_i;$$

$$P_2x=\begin{cases}\dfrac{\tau_k^+-t^-\tau_k^+}{\tau_k-t}\,y_k, & t\neq\tau_k;\\ \tau_k^+y_k, & t=\tau_k\end{cases}$$

$$p_3(x)=q(t_1,\ t)-t_1.$$

Для проверки сублинейности оператора P в силу сублинейности оператора P_1 достаточно установить сублинейность оператора $x \longrightarrow P_2x+p_3(x)u$ с двумерной лексикографически упорядоченной областью значений. Для этого ввиду сублинейности функционала p_3 следует проверить только, что $P_2x+P_2x' \geqslant P_2(x+x')$, как только $p_3(x)+p_3(x')=p_3(x+x')$.

Пусть

$$x' = t_1'u_1 + t'u + \sum_{i=1}^{k} \tau_i' y_i.$$

Очевидно, что $p_3(x+x')=p_3(x)+p_3(x')$ в том и только в том случае, если выполняется одно из условий

(а) $t_1 = rt_1'$, $t = rt'$ для некоторого $r > 0$;

(б) $t_1 \geqslant 0$, $t \geqslant 0$; $t_1' \geqslant 0$, $t' \geqslant 0$;

(в) $t_1 \geqslant 0$, $t \leqslant 0$; $t_1' \geqslant 0$, $t' \leqslant 0$;

(г) $t_1 \leqslant 0$, $t \leqslant 0$; $t_1' \leqslant 0$, $t' \leqslant 0$.

Легко видеть, что в каждом из этих случаев $P_2(x+x') \leqslant$ $\leqslant P_2x+P_2x'$, так что оператор P действительно сублинеен.

Рассмотрим следующие множества:

$$M = \{-P(ry_k - u) - A_0(-ry_k) = ry_k/(1+r) : y_k \in B,\ r>0\};$$

$$N = \{-P(-su_1+u) + A_0(su_1) = (1+s)u+su_1 : s \geqslant 0\}.$$

Поскольку по предложению Y удовлетворяет заключению теоремы Хана — Банаха — Канторовича, то можно проверить, что существует элемент $y_0 \in Y$, для которого $M \leqslant y_0 \leqslant N$.

Проверим, что $y_0 \overline{\in} Y_0$. В противном случае, как видно, мы бы имели элемент $y_0 > \mathbf{0}$ такой, что $y_0 < \alpha u$ для всех $\alpha > 0$, и, кроме того, выполнялось бы для всех $u' \in U$ при некотором $\alpha' > 0$ неравенство $\alpha' u' < y_0$. Последнее противоречит сделанному допущению.

Рассмотрим теперь подпространство $Y_1 = \mathscr{L}(Y_0 \cup \{y_0\})$. Осталось установить, что это подпространство лексикографически упорядочено.

Заметим сначала, что пространства X_0 и X суть лексикографически упорядоченные подпространства Y. Более того, множество $X_1 = \mathscr{L}(X \cup \{y_0\})$ является лексикографически упорядоченным подпространством Y. В самом деле, если $y_k \in B$, то можно выбрать $y \in U$ так, чтобы $\lambda y_k < \alpha y < \beta u$ для всех $\lambda > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Поскольку $y \in U$ и $y_k \leqslant 2y_0$ для всех $y_k \in B$, то найдется $\alpha' > 0$, для которого $\alpha' y \leqslant y_0$. Помимо этого, условие $M \leqslant y_C \leqslant N$ влечет, что $y_0 < \beta u$ для всех $\beta > 0$. Следовательно, $\lambda y_k < y_0 < < \beta u$ для всех $\lambda > 0$, $\beta > 0$. Последнее означает, что для всех $x_0 \in X_0^+$ и всяких α, $\beta > 0$ выполняется $x_0 < \alpha y_0 < \beta u$. Так как X_C — лексикографически упорядочено, это означает, что лексикографически упорядочено и X_1.

Теперь уже можно перейти к интересующему нас вопросу о лексикографической упорядоченности Y_1. Рассмотрим ненулевой элемент $v \in Y_1$. Ясно, что $v = v_0 + \lambda y_C$, где $v_0 \in Y_0$, $\lambda \in \mathbf{R}$. Если $v_C \in X$, то $v \in X_1$ и, значит, v входит в один и только в один из конусов $X_1 \cap Y^+$ и $-(X_1 \cap Y^+)$ по уже установленному. Если же $v_0 \overline{\in} X_1$, то положим

$$X_2 = \mathscr{L}(X_1 \cup \{v_0\}); \quad X_3 = \mathscr{L}(X_2 \cup \{y_0\}); \quad W = \mathscr{L}(\{u_1, u, v_0\}).$$

Так как $W \subset Y_C$, то W — лексикографически упорядоченное трехмерное подпространство, причем подпространство, натянутое на u_1 и u, также лексикографически упорядочено. Отсюда можно вывести, что для некоторого элемента $w \in W$, независимого от u и u_1, для всех α, $\beta > 0$ выполняется одно из следующих соотношений:

$$0 < \alpha w < u_1 < \beta u;$$

$$\alpha u_1 < u < \beta w;$$

$$\alpha u_1 < w < \beta u.$$

Так как $v_C \overline{\in} X_1$, то $w \overline{\in} X_1$ и, значит, $w \overline{\in} \mathscr{L}(\{B\})$, что исключает случай $\alpha u_1 < w < \beta u$ для всех α, $\beta > 0$. В остальных двух случаях для некоторого $\lambda > 0$ и $C_B = \lambda B$ при всех α, β, $\gamma > 0$ выполняется соответственно

$$0 < \alpha w < u_1 < C_B < \beta y_C < u;$$

$$\alpha u_1 < C_B < \beta y_C < u < \gamma w.$$

Так как $\mathscr{L}(\{B\})$ и W лексикографически упорядочены, то получается, что и X_3 лексикографически упорядочено, т. е. v принадлежит в точности одному из конусов $X_3 \cap Y^+$ и $-(X_3 \cap Y^+)$. Следовательно, то же можно сказать о конусах $Y_1 \cap Y^+$ и $-(Y_1 \cap Y^+)$.

Получилось, что подпространство Y_1 содержит Y_C как собственное подпространство и является лексикографически упорядоченным. Это противоречит максимальности Y_C.

Таким образом, для Y не справедливо заключение теоремы Хана — Банаха — Канторовича.

Случай 2. Рассмотрим теперь тот случай, когда для некоторых u, u_1 из Y_C таких, что $u_1 < \alpha u$ для всех $\alpha > 0$, множество

$$U = \{y \in Y_C : \beta u_1 < y < \alpha u \quad (\alpha, \beta > 0)\}$$

пусто [1].

Пусть $X = \mathbf{R}^2$ и $X_0 = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_1 = 0\}$. Рассмотрим оператор $P : X \longrightarrow Y$, определенный соотношением

$$P(x_1, x_2) = -(x_1^+ x_2^+)^{1/2} u_1 + \left(q(x_1^-, x_2) + x_2^- + x_1\right) u.$$

Несложно убедиться в том, что P — сублинейный оператор, мажорирующий на X_0 линейный оператор $A_0 : X_0 \longrightarrow Y$, действующий по формуле

$$A_0(0, x_2) = x_2 u.$$

Отметим, что здесь используется лексикографическая упорядоченность подпространства, натянутого на u и u_1, и сублинейность функционала q.

Заметим теперь, что

$$-P(-1, -t) - A_0(0, t) = \begin{cases} -2tu, & t \geqslant 0 \\ -tu/(1-t), & t < 0 \end{cases};$$

$$P(1, t) - A_0(0, t) = \begin{cases} -t^{1/2} u_1 + u, & t \geqslant 0 \\ (-2t + 1) u, & t < 0 \end{cases}.$$

Определим следующие множества

$$S = \{-tu/(1-t) : t \leqslant 0\};$$
$$T = \{-t^{1/2} u_1 + u : t \geqslant 0\}.$$

---

[1] Несложно убедиться в том, что ситуации, описанные случаями 1 и 2, действительно реализуются.

Имеем $S\leqslant T$. Кроме того, допустив, что для Y справедливо заключение теоремы Хана — Банаха — Канторовича, найдем элемент $v_0'\in Y$, для которого $S\leqslant v_0'\leqslant T$. Как и выше, установим, что $v_0'\overline{\in} Y_0$. Действительно, в противном случае $v_0=u-v_0'\in Y_0$ и, кроме того, для любых t, $-\tau>0$ выполняется

$$t^{1/2}u_1\leqslant v_0\leqslant u/(1-\tau),$$

чего быть не может.

Пусть $Y_1=\mathscr{L}(Y_0\cup\{v_0\})$. Проверим, что пространство Y_1 лексикографически упорядочено. Положим $W_1=\mathscr{L}(\{u_1, u\})$ и $W_2=\mathscr{L}(W_1\cup\{v_0\})$. Ясно, что W_1 — лексикографически упорядочено. Кроме того, в силу условия $\alpha u_1<v_0<\beta u$ для всех α, $\beta>0$, пространство W_2 также лексикографически упорядочено. Возьмем теперь ненулевой элемент $y_1=y_0+\lambda v_0\in Y_1$, где $y_0\in Y_0$ и $\lambda\in\mathbf{R}$. Если $y_0\in W_1$, то $y_1\in W_2$ и, стало быть, входит в точности в один из конусов $Y_1\cap Y^+$ и $-(Y_1\cap Y^+)$ по уже отмеченному. Если же $y_0\overline{\in} W_1$, то положим $W_3=\mathscr{L}(W_1\cup\{y_0\})$ и $W_4=\mathscr{L}(W_3\cup\{v_0\})$. Ясно, что W_3 — лексикографически упорядоченное трехмерное подпространство, содержащее лексикографически упорядоченное подпространство W_1. Несложно убедиться в том, что в силу этого найдется элемент $w\in W_3$, независимый от элементов u_1 и u и такой, что для всех α, $\beta>0$ выполнено одно из следующих соотношений:

$$0<\alpha w<u_1<\beta u;$$

$$\alpha u_1<u<\beta w;$$

$$\alpha u_1<w<\beta u.$$

По предположению последний случай невозможен. В первом же случае получается

$$0<\alpha w<u_1<\beta v_0<u \quad (\alpha,\ \beta>0),$$

а во втором, соответственно,

$$\alpha u_1<v_0<\beta u<w \quad (\alpha,\ \beta>0).$$

В обоих случаях из этого следует, что подпространство W_4 является лексикографически упорядоченным и, значит, элемент y_1 входит в один и только в один из конусов $W_4 \cap Y^+$ и $-(W_4 \cap Y^+)$. Таким образом, подпространство Y_1 — лексикографически упорядочено, что приводит к противоречию.

Чтобы завершить этап II доказательства, заметим, что предположение об остроте конуса Y^+ (которым мы воспользовались, например, при проверке того, что W_4 лексикографически упорядочено) несущественно. Действительно, если Y^+ — не острый конус, то можно рассмотреть подпространство $Z_0 = Y^+ \cap (-Y^+)$. По определению $Y_0 \cap Z_0 = \{0\}$. Значит, алгебраическое дополнение Z_1 подпространства Z_0 содержит Y_0. Кроме того, поскольку конус $Z_1 \cap Y^+$ — острый, то для Z_1 не выполнено заключение теоремы Хана — Банаха — Канторовича по уже доказанному. Отсюда мгновенно следует, что то же можно сказать и о пространстве Y.

Этап III. Нам осталось рассмотреть случай, когда пересечение конуса Y^+ с любой прямой замкнуто.

Рассмотрим два непустых подмножества A и B в Y таких, что $A \leqslant B$. Будем считать, что $0 \in A$ и в B есть элемент b такой, что $-b \overline{\in} Y^+$. Положим $B' = \{b' : A \leqslant \leqslant b' \leqslant b\}$.

Упорядочим теперь пространство $Y \times \mathbf{R}$ с помощью конической оболочки следующих множеств

$$Y^+ \times \{0\}, \quad -A \times \{1\}, B' \times \{-1\}.$$

Очевидно, что Y можно отождествить с подпространством $Y \times \{0\}$ пространства $Y \times \mathbf{R}$.

Пусть теперь

$$X = \{(y, t) : \exists \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R} \ \alpha_1(b, 0) \leqslant (y, t) \leqslant \alpha_2(b, 0)\}.$$

В качестве X_0 возьмем $X \cap Y \times \{0\}$ и положим

$$Px = \inf\{\alpha(b, 0) : x \leqslant \alpha(b, 0)\}.$$

Поскольку пересечение Y^+ с любой прямой замкнуто, очевидно, выполняется, что $x_0 \leqslant Px_0$ для всех $x_0 \in X_0$. Кроме того, по услевию найдется оператор $A : X \longrightarrow Y \times \times \{0\}$ такой, что $Ax \leqslant Px$ для всех $x \in X$, причем $Ax_0 =$

$=x_0$ для всех $x_0 \in X_0$. Положим $v=A(0, 1)$. Непосредственно проверяется, что $A \times \{0\} \leqslant v \leqslant B' \times \{0\}$. Отсюда можно получить, что множества A и B разделяются некоторым элементом $v_0 \in Y$. Взяв теперь в качестве A какое-либо ограниченное сверху множество, а в качестве B — множество всех верхних границ A, видим, что элемент v_0 такой, что $A \leqslant v_0 \leqslant B$, служит точной верхней границей множества A.

Теорема доказана полностью.

II.1.5. В этом пункте мы обсудим простейшие в техническом смысле и очень важные для приложений следствия из теоремы Хана — Банаха — Канторовича.

Рассмотрим векторное пространство X, некоторое K-пространство Y и сублинейный оператор $P: X \mapsto Y$.

I. *Опорное множество $\partial(P)$ не пусто.*

В самом деле не пустым является субдифференциал срезки $P_{\{0\}}$. Кроме того, по теореме Хана — Банаха — Канторовича выполняется $\partial(P_{\{0\}}) = \partial(P) + \partial(\delta_Y(\{0\}))$, т. е. $\partial(P) \neq \varnothing$.

II. *Для каждой точки $x^* \in X$ не пустым является субдифференциал $\partial_{x^*}(P)$, причем*

$$\partial_{x^*}(P) = \{A \in L(X, Y) : A \in \partial(P), \quad Ax^* = Px^*\}.$$

Положим $X_0 = (\alpha x^*)_{\alpha \in \mathbf{R}}$ и определим линейный оператор $A_0 : X_0 \longrightarrow Y$ соотношением $A_0(\alpha x^*) = \alpha P x^*$. Отметим, что для всякого α выполняется $\alpha P x^* \leqslant P(\alpha x^*)$. Действительно, последнее соотношение очевидно для положительных α. Если же α — отрицательно, то $\alpha P x^* = -P(|\alpha| x^*) \leqslant P(-|\alpha| x^*) = P(\alpha x^*)$, так как в силу сублинейности P справедливо неравенство $Px^* + P(-x^*) \geqslant 0$. В силу теоремы Хана — Банаха — Канторовича найдется продолжение A оператора A_0 на X, опорное к P. По условию $Ax^* = A_0 x^* = Px^*$. Значит, $Ax - Ax^* \leqslant Px - Px^*$ для всех $x \in X$, т. е. $A \in \partial_{x^*}(P)$.

Таким образом, субдифференциал $\partial_{x^*}(P)$ не пуст. Оставшаяся часть предложения проверяется непосредственно.

III. *Справедливо следующее представление*:

$$Px = \sup \{Ax : A \in \partial(P)\} \quad (x \in X).$$

Это непосредственно вытекает из предложения II.

IV. *Для любого $x \in X$ выполняется*

$$\partial(P)x = [-P(-x),\ Px].$$

Последнее соотношение можно установить, повторив схему доказательства предложения II.

V. *Пусть X_1 — еще одно векторное пространство и A — линейный оператор из X_1 в X. Тогда справедливо представление*

$$\partial(P \circ A) = \partial(P) \circ A.$$

Очевидно, что любой элемент $B \in \partial(P) \circ A$ входит в множество $\partial(P \circ A)$. В самом деле, по определению $B = C \circ A$, где $Cx \leqslant Px$ для всех $x \in X$. Следовательно,

$$Bx_1 = C(Ax_1) \leqslant P(Ax_1) = P \circ Ax_1 \quad (x_1 \in X_1),$$

т. е. оператор B опорен к $P \circ A$.

Проверим обратное включение. Для этого возьмем элемент B из $\partial(P \circ A)$. Таким образом, для $x_1 \in X_1$ выполняется $Bx_1 \leqslant P(Ax_1)$. Пусть $X_0 = A[X_1]$ — подпространство в X. Если $Ax_1 = Ax_2$, то $A(x_1 - x_2) = 0$, и, значит, $B(x_1 - x_2) \leqslant P(A(x_1 - x_2)) \leqslant 0$. Аналогично $B(x_2 - x_1) \leqslant 0$ и, стало быть, $Bx_1 = Bx_2$. Таким образом, на подпространстве X_0 корректно определен линейный оператор $C_0 : X_0 \longrightarrow Y$ соотношением $C_0(Ax_1) = Bx_1$ для всех $x_1 \in X_1$. По условию, $C_0x_0 \leqslant Px_0$ для $x_0 \in X_0$ и, значит, по теореме Хана — Банаха — Канторовича существует линейное продолжение $C : X \longrightarrow Y$ оператора C_0, опорное к сублинейному оператору P. Имеем

$$Bx_1 = C_0(Ax_1) = C(Ax_1) = C \circ Ax_1 \quad (x_1 \in X_1)$$

и $C \in \partial(P)$. Значит, $B \in \partial(P) \circ A$, что и требовалось доказать.

Следующее предложение представляет собой частный и наиболее употребительный случай теоремы Мазура — Орлича, которую мы докажем в полном объеме позднее.

Лемма Мазура — Орлича. *Пусть H — конус в векторном пространстве X, пространство Y является K-пространством и $P : X \longrightarrow Y$ — сублинейный оператор. Пусть, далее, $A \in L(X, Y)$, причем $Ah \leqslant Ph$ для всех*

$h \in H$. Тогда существует оператор $B \in \partial(P)$ такой, что $Ah \leqslant Bh$ для всех $h \in H$. Иными словами, справедливо представление

$$\partial(P_H) = \partial(P) + \partial(\delta_Y(H)).$$

Доказательство. Для $x \in X$ и $h \in H$ имеем

$$P(x+h) - Ah \geqslant P(x+h) - Ph = P(x+h) - P(x+h-x) \geqslant \geqslant -P(-x).$$

Таким образом, определен элемент

$$P_1 x = \inf_{h \in H} (P(x+h) - Ah).$$

Установим, что оператор $P_1 : X \longrightarrow Y$, действующий по формуле $x \longrightarrow P_1 x$, сублинеен. В самом деле, если $\alpha > 0$ и $x_1, x_2 \in X$, то

$$P_1(\alpha x_1) = \inf_{h \in H} (P(\alpha x_1 + h) - Ah) =$$
$$= \inf_{h \in \alpha H} (P(\alpha x_1 + h) - Ah) = \alpha P x_1$$

и, соответственно,

$$P(x_1 + x_2) = \inf_{h \in H} (P(x_1 + x_2 + h) - Ah) =$$
$$= \inf_{h_1 \in H} \inf_{h_2 \in H} (P(x_1 + x_2 + h_1 + h_2) -$$
$$- A(h_1 + h_2)) \leqslant P_1 x_1 + P_2 x_2.$$

По предложению I существует оператор B такой, что $B \in \partial(P_1)$. Очевидно, что $B \in \partial(P)$, так как $Px \geqslant P_1 x$ для всех $x \in X$. Кроме того, для элемента $h \in H$ выполняется

$$B(-h) \leqslant P_1(-h) \leqslant P0 - Ah = -Ah,$$

т. е. $Bh \geqslant Ah$.

Оставшаяся часть утверждения очевидна. Лемма доказана.

§ 2. ОПОРНЫЕ МНОЖЕСТВА СУБЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В этом параграфе мы займемся более детальным изучением строения опорных множеств сублинейных операторов и, в частности, получим явные представления опорных множеств ряда суперпозиций таких операторов.

II.2.1. Рассмотрим векторное пространство X, некоторое K-пространство Y и множество $\mathfrak{A}$ в $L(X, Y)$.

Множество $\mathfrak{A}$ называется *слабо порядково ограниченным*, если для всякого $x \in X$ ограничено множество $\langle\mathfrak{A}\rangle x = \{Ax : A \in \mathfrak{A}\}$. Тем самым с каждым слабо порядково ограниченным множеством $\mathfrak{A}$ можно связать сублинейный оператор

$$P_{\mathfrak{A}} : x \to \sup \{Ax : A \in \mathfrak{A}\}.$$

Опорное множество $\partial\left(P_{\mathfrak{A}}\right)$ мы будем называть *опорной оболочкой* множества $\mathfrak{A}$ и обозначать $\operatorname{cop}(\mathfrak{A})$. Таким образом,

$$\operatorname{cop}(\mathfrak{A}) = \{A \in L(X, Y) : Ax \leqslant P_{\mathfrak{A}}x \quad (x \in X)\}.$$

Отметим, что оператор cop, определенный на совокупности всех слабо порядково ограниченных подмножеств $L(X, Y)$, является *оператором замыкания в смысле Мура*, т. е. удовлетворяет соотношениям:

$$\operatorname{cop}(\mathfrak{A}) \supset \mathfrak{A};$$

$$\mathfrak{A}_1 \supset \mathfrak{A}_2 \Rightarrow \operatorname{cop}(\mathfrak{A}_1) \supset \operatorname{cop}(\mathfrak{A}_2);$$

$$\operatorname{cop}(\operatorname{cop}(\mathfrak{A})) = \operatorname{cop}(\mathfrak{A}).$$

Нас будет интересовать явное представление опорной оболочки и, в частности, вопрос о представлении оператора cop в виде суперпозиции аналогичного алгебраического оператора замыкания и замыкания относительно некоторой топологии.

Прежде всего, используя результаты предыдущего параграфа, мы покажем, что сублинейных операторов не так уж много. Точнее говоря, мы заметим, что с каждой мощностью связан всего один «по-настоящему» сублинейный оператор — канонический оператор, а все остальные сублинейные операторы получаются суперпозицией этого канонического оператора с некоторыми линейными операторами. Для этого нам понадобятся некоторые вспомогательные конструкции.

Итак, пусть Y — некоторое K-пространство и $\mathfrak{A}$ — произвольное множество. Рассмотрим произведение $\mathfrak{A}$ экземпляров Y — пространство $Y^{\mathfrak{A}}$, наделенное канонической структурой K-пространства. Символом $\Delta_{\mathfrak{A}}$ обозначим оператор вложения Y в диагональ пространства $Y^{\mathfrak{A}}$, иными словами,

$$\Delta_{\mathfrak{A}} = \Delta_{\mathfrak{A},Y} : y \to (y)_{A \in \mathfrak{A}}.$$

Введем в рассмотрение следующее множество

$$(Y^{\mathfrak{A}})_{\infty} = \left(\Delta_{\mathfrak{A}}[Y] + Y^{\mathfrak{A}}_{+}\right) \cap \left(\Delta_{\mathfrak{A}}[Y] - Y^{\mathfrak{A}}_{+}\right)$$

— *нормальную оболочку* диагонали $\Delta_{\mathfrak{A}}[Y]$ в пространстве $Y^{\mathfrak{A}}$.

I. *Множество* $(Y^{\mathfrak{A}})_{\infty}$ *является фундаментом K-пространства* $Y^{\mathfrak{A}}$.

Действительно, очевидно следующее представление:

$$(Y^{\mathfrak{A}})_{\infty} = \{(y_A)_{A \in \mathfrak{A}} : \exists y_1, y_2 \in Y \quad y_1 \leqslant y_A \leqslant y_2 \quad (A \in \mathfrak{A})\},$$

Отсюда мгновенно следует, что $(Y^{\mathfrak{A}})_{\infty}$ — подпространство $Y^{\mathfrak{A}}$ и, кроме того, тот факт, что это подпространство нормально содержится в $Y^{\mathfrak{A}}$. Фундаментом это пространство является в виду того обстоятельства, что точные верхние границы в $Y^{\mathfrak{A}}$ вычисляются покоординатно.

В дальнейшем нам понадобится также следующее замечание. Если $\mathfrak{A}'$ — подмножество $\mathfrak{A}$, то пространство $(Y^{\mathfrak{A}'})_{\infty}$ допускает естественное отождествление с компонентой $\Pr_{\mathfrak{A}'}[(Y^{\mathfrak{A}})_{\infty}]$, где проектор $\Pr_{\mathfrak{A}'}$ определен соотношением

$$\Pr_{\mathfrak{A}'} : (y_A)_{A \in \mathfrak{A}} \to \begin{pmatrix} y_A, & A \in \mathfrak{A}' \\ 0, & A \overline{\in} \mathfrak{A}' \end{pmatrix}_{A \in \mathfrak{A}}.$$

Аналогичным образом иногда удобно отождествлять пространство $((Y \times \{0\})^{\mathfrak{A}})_\infty$ с пространством $(Y^{\mathfrak{A}})_\infty$.

На пространстве $(Y^{\mathfrak{A}})_\infty$ действует *канонический сублинейный оператор* $\varepsilon_{\mathfrak{A}} : (Y^{\mathfrak{A}})_\infty \to Y$ по правилу

$$\varepsilon_{\mathfrak{A}} = \varepsilon_{\mathfrak{A},Y} : (y_A)_{A \in \mathfrak{A}} \to \sup \{y_A : A \in \mathfrak{A}\}.$$

В случае, когда $\mathfrak{A}$ является слабо порядково ограниченным множеством в пространстве $L(X, Y)$, возникает естественный линейный оператор $\langle \mathfrak{A} \rangle : X \to (Y^{\mathfrak{A}})_\infty$, определенный соотношением

$$\langle \mathfrak{A} \rangle x = (Ax)_{A \in \mathfrak{A}}.$$

Непосредственным следствием введенных определений является следующая

Лемма. *Пусть X — векторное пространство, Y — некоторое K-пространство, $P : X \longrightarrow Y$ — сублинейный оператор, причем $\partial(P) = \operatorname{cop}(\mathfrak{A})$. Тогда справедливо представление*

$$P = \varepsilon_{\mathfrak{A}} \circ \langle \mathfrak{A} \rangle.$$

II.2.2. С помощью конструкций, приведенных в предыдущем пункте, оказывается возможным привести естественные представления опорных оболочек.

I. *Пусть Z — некоторое K-пространство и $P : Y \longrightarrow Z$ — возрастающий сублинейный оператор. Тогда*

$$\partial(P \circ \varepsilon_{\mathfrak{A}}) = \left\{A \in L^+\left((Y^{\mathfrak{A}})_\infty, Z\right) : A \circ \Delta_{\mathfrak{A}} \in \partial(P)\right\}.$$

Пусть сначала $Ay \leqslant P \circ \varepsilon_{\mathfrak{A}} y$ для всех $y \in (Y^{\mathfrak{A}})_\infty$. Если $y \leqslant 0$, то $\varepsilon_{\mathfrak{A}} y \leqslant 0$ и, значит, $A \in L^+\left((Y^{\mathfrak{A}})_\infty, Z\right)$. Если же $y = \Delta_{\mathfrak{A}} x$, то

$$A \circ \Delta_{\mathfrak{A}} x = Ay \leqslant P \circ \varepsilon_{\mathfrak{A}} y = (P \circ \varepsilon_{\mathfrak{A}}) \Delta_{\mathfrak{A}} x = Px,$$

так что $A \circ \Delta_{\mathfrak{A}} \in \partial(P)$.

Пусть теперь известно, что A — положительный оператор и $A \circ \Delta_{\mathfrak{A}} \in \partial(P)$. Тогда для $y \in (Y^{\mathfrak{A}})_\infty$ выполняется

$$Ay \leqslant (A \circ \Delta_{\mathfrak{A}}) \varepsilon_{\mathfrak{A}} y \leqslant P(\varepsilon_{\mathfrak{A}} y) = P \circ \varepsilon_{\mathfrak{A}} y,$$

что и требовалось проверить.

II. *Справедливо представление*

$$\partial(\varepsilon_{\mathfrak{A}}) = \left\{\alpha \in L^+\left((Y^{\mathfrak{A}})_\infty, Y\right) : \alpha \circ \Delta_{\mathfrak{A}} = I_Y\right\},$$

где I_Y — тождественное отображение Y на себя.

Действительно, следует применить предложение I, взяв в качестве P линейный оператор I_Y.

III. *Для любого слабо порядково ограниченного множества $\mathfrak{A}$ справедливо представление*

$$\mathrm{cop}(\mathfrak{A}) = \partial(\varepsilon_{\mathfrak{A}}) \circ \langle \mathfrak{A} \rangle.$$

Действительно, имеем цепочку тождеств (см. предложение V в 1.5)

$$\mathrm{cop}(\mathfrak{A}) = \partial(P_{\mathfrak{A}}) = \partial(\varepsilon_{\mathfrak{A}} \circ \langle \mathfrak{A} \rangle) = \partial(\varepsilon_{\mathfrak{A}}) \circ \langle \mathfrak{A} \rangle.$$

Отметим здесь, что предложение III является аналогом теорем типа Шоке об интегральных представлениях точек выпуклых компактов, к детальному анализу которых мы перейдем в следующей главе. Сейчас мы ограничимся лишь тем, что приведем простейший пример применения предложения III.

Пример. Пусть $Y = \mathbb{R}$. Тогда в силу определений пространство $(Y^{\mathfrak{A}})_\infty$ совпадает с пространством $l_\infty(\mathfrak{A})$ всех ограниченных функций на $\mathfrak{A}$. Таким образом, если f_0 — некоторый линейный функционал на векторном пространстве X и $\mathfrak{A}$ — некоторое слабо (порядково) ограниченное множество таких функционалов, то предложение III, в частности, означает, что

$$f_0(x) \leqslant \sup\{f(x) : f \in \mathfrak{A}\} \ (x \in X)$$

в том и только в том случае, если

$$f_0(x) = \int_{\mathfrak{A}} x(\cdot)\, d\alpha \quad (x \in X)$$

для некоторой конечно аддитивной вероятностной меры на алгебре подмножеств $\mathfrak{A}$, а функционал $x(\cdot)$ действует по правилу $x(\cdot):f\longmapsto f(x)$.

В приложениях интересуются случаями, когда в пространстве Y — области значений рассматриваемых сублинейных операторов — задана некоторая отделимая линейная топология τ. В этом случае в каждом пространстве операторов $L(X, Y)$ возникает так называемая *τ-операторная топология* — топология, индуцированная в $L(X, Y)$ вложением $L(X, Y)$ в пространство Y^X, наделенное тихоновской топологией. В такой ситуации представляет интерес вопрос о компактности субдифференциалов. В этой связи назовем топологию τ *допустимой*, если опорное множество любого сублинейного оператора компактно в τ-операторной топологии. Существенным фактом, который следует иметь в виду при анализе указанного вопроса о компактности, является следующее обстоятельство.

IV. *Топология в Y допустима в том и только в том случае, если порядковые интервалы в Y компактны в этой топологии.*

Если интервалы компактны, то в силу теоремы Тихонова и предложения IV из **1.5** компактен субдифференциал $\partial(P)$ для любого сублинейного оператора P, что доказывает достаточность приведенного условия. Необходимость вытекает из того факта, что образ опорного множества $\partial(P)$, где $P:z\longmapsto z^+$, при непрерывном отображении $A\longmapsto Ay$ совпадает с порядковым интервалом $[0, y]$.

Последнее предложение показывает, в частности, что в вопросе о факторизации оператора опорной оболочки нам придется привлекать к рассмотрению недопустимые топологии.

II.2.3. В дальнейшем важную роль будет играть специальный класс операторов в векторных решетках, свойства которых изложены в этом пункте. Для простоты мы ограничимся рассмотрением K-пространства Y.

Оператор $\alpha\in L^+(Y, Y)$ такой, что $\alpha\leqslant I_Y$, называется *мультипликатором.* Множество всех мультипликаторов в Y обозначается $\Lambda(Y)$.

I. *Каждый мультипликатор α является (o)-непрерывным. Более того, для любого ограниченного сверху подмножества U пространства Y выполняется $\alpha\sup U=$ $=\sup\alpha[U]$.*

Действительно, поскольку операторы α и $I_Y-\alpha$ положительны, то имеют место оценки

$$\alpha \sup U \geqslant \sup \alpha[U];$$
$$(I_Y-\alpha)\sup U \geqslant \sup (I_Y-\alpha)[U].$$

Помимо этого, $\alpha+(I_Y-\alpha)=I_Y$, так что

$$\sup U=\alpha \sup U+(I_Y-\alpha)\sup U \geqslant \sup \alpha[U]+$$
$$+\sup (I_Y-\alpha)[U] \geqslant \sup U,$$

откуда и вытекает требуемое утверждение.

II. *Любые два мультипликатора коммутируют.*

Воспользуемся реализацией K-пространства Y в виде фундамента K-пространства $C_\infty(Q)$ для некоторого экстремального компакта Q (см. I.4).

Для всякого положительного $z \in C_\infty(Q)$ выполняется

$$z=\sup\{y \in Y : 0 \leqslant y \leqslant z\}.$$

Таким образом, любой мультипликатор $\gamma \in \Lambda(Y)$ допускает продолжение $\tilde{\gamma}$ до мультипликатора из $\Lambda(C_\infty(Q))$, определенное очевидным соотношением

$$\tilde{\gamma} z=\sup\{\gamma y : 0 \leqslant y \leqslant z\}.$$

Несложно убедиться в том, что такое продолжение единственно.

Возьмем теперь два мультипликатора $\alpha, \beta \in \Lambda(Y)$ и рассмотрим их продолжения $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in \Lambda(C_\infty(Q))$. Заметим, что

$$\tilde{\alpha}[C_Q] \subset C_Q; \quad \tilde{\beta}[C_Q] \subset C_Q,$$

т. е. операторы $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ переводят подпространство ограниченных элементов в себя. Отсюда непосредственно следует, что сужения операторов $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ на C_Q входят в $\Lambda(C_Q)$ и, значит, коммутируют на C_Q (являясь там просто операторами умножения на соответствующую функцию). Осталось заметить, что C_Q — фундамент в $C_\infty(Q)$, чтобы сделать вывод о том, что операторы $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ коммутируют на $C_\infty(Q)$. Тем самым, их следы на Y — операторы α и β — также коммутируют.

III. *Если мультипликатор α обратим, то $\alpha[Y]$ — фундамент в Y, причем α — порядковый изоморфизм $\alpha[Y]$ и Y.*

Проверим сначала, что $\alpha[Y]$ — нормальное подпространство в Y. В самом деле, если $0 \leqslant z \leqslant \alpha y$, то учитывая, например, предложение IV в **1.5** и замечание, сделанное в предложении IV в **2.2**, найдем мультипликатор $\beta \in \Lambda(Y)$ такой, что $z = \beta \circ \alpha y$. Так как $\beta \circ \alpha = \alpha \circ \beta$ по предложению II, то $z \in \alpha[Y]$.

Пусть теперь элемент $z \in Y$ таков, что $|z| \wedge |\alpha y| = 0$ для всех $y \in Y$. Тогда

$$0 = |z| \wedge |\alpha y| \geqslant \alpha |z| \wedge |\alpha y| = \alpha(|z| \wedge |y|) \geqslant 0$$

для всех $y \in Y$ по предложению I. По условию $\operatorname{Ker}(\alpha) = \{0\}$. Это означает, что $|z| \wedge |y| = 0$ для всех $y \in Y$. Таким образом, $z = 0$ и, стало быть, $\alpha[Y]$ — фундамент в Y.

Осталось проверить, что если $\alpha y > 0$, то $y > 0$. Допустим противное. Тогда найдется проектор Pr в Y такой, что $\operatorname{Pr} y < 0$ — это следует, например, из теоремы о реализации произвольного K-пространства. Значит, применяя предложение II, получаем

$$\alpha \circ \operatorname{Pr} y \leqslant 0 \leqslant \operatorname{Pr} \circ \alpha y = \alpha \circ \operatorname{Pr} y,$$

так что $\alpha \circ \operatorname{Pr} y = 0$ и, значит, $\operatorname{Pr} y = 0$ в силу условия $\operatorname{Ker}(\alpha) = \{0\}$. Полученное противоречие завершает доказательство.

II.2.4. Применим теперь полученные результаты к вопросу о факторизации оператора опорной оболочки. Нам потребуются следующие определения.

Слабо порядково ограниченное множество $\mathfrak{A}$ в пространстве линейных операторов $L(X, Y)$ называется *операторно выпуклым*, если для любых двух элементов A_1, A_2 из $\mathfrak{A}$ и мультипликаторов α_1, $\alpha_2 \in \Lambda(Y)$ таких, что $\alpha_1 + \alpha_2 = I_Y$, выполняется соотношение $\alpha_1 \circ A_1 + \alpha_2 \circ A_2 \in \mathfrak{A}$.

Слабо порядково ограниченное множество $\mathfrak{A}$ в $L(X, Y)$ называется *сильно операторно выпуклым*, если для любого (o)-суммируемого семейства мультипликаторов $(\alpha_\xi)_{\xi \in \Xi} \subset \Lambda(Y)$ такого, что $\sum_{\xi \in \Xi} \alpha_\xi = I_Y$, и любого семейства $(A_\xi)_{\xi \in \Xi}$ операторов из $\mathfrak{A}$ выполняется $\sum_{\xi \in \Xi} \alpha_\xi \circ A_\xi \in \mathfrak{A}$, где последнее семейство суммируется поточечно, т. е. (o)-суммируются семейства $(\alpha_\xi \circ A_\xi x)_{\xi \in \Xi}$ для всякого $x \in X$.

I. *Опорное множество любого сублинейного оператора сильно операторно выпукло.*

Действительно, пусть

$$\mathfrak{A} = \partial(P); \quad \alpha_\xi \in \Lambda(Y), \quad A_\xi \in \mathfrak{A} \quad (\xi \in \Xi); \quad \sum_{\xi \in \Xi} \alpha_\xi = I_Y.$$

Привлекая предложение I из предыдущего пункта, получаем

$$|\alpha_\xi \circ A_\xi x| = \alpha_\xi \circ |A_\xi x| \leqslant \alpha_\xi (Px \vee P(-x))$$

для любого $x \in X$. Таким образом, семейство $(\alpha_\xi \circ A_\xi x)_{\xi \in \Xi}$ мажорируется (o)-суммируемым семейством, а потому и само является (o)-суммируемым.

II. *Для всякого слабо порядково ограниченного множества* $\mathfrak{A}$ *существует наименьшее операторно выпуклое множество* $\operatorname{op}(\mathfrak{A})$, *содержащее* $\mathfrak{A}$. *При этом*

$$\operatorname{op}(\mathfrak{A}) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \circ A_k : A_k \in \mathfrak{A}, \quad \alpha_k \in \Lambda(Y), \quad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = I_Y \right\}.$$

В силу предложения I существование множества $\operatorname{op}(\mathfrak{A})$ очевидно, так как $\mathfrak{A} \subset \operatorname{cop}(\mathfrak{A})$ и $\operatorname{cop}(\mathfrak{A}) = \partial(P_{\mathfrak{A}})$. Поэтому для завершения доказательства следует установить только, что если некоторое слабо порядково ограниченное множество $\mathfrak{A}'$ операторно выпукло, то для любого набора мультипликаторов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Lambda(Y)$ таких, что $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = I_Y$, и элементов $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{A}'$ выполняется $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \circ A_k \in \mathfrak{A}'$.

Пусть последнее утверждение установлено для $n \geqslant 2$. Рассмотрим операторы

$$B = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \circ A_k + \alpha_{n+1} \circ A_{n+1};$$

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1} \in \Lambda(Y), \quad \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k = I_Y; \ A_1, \ldots, A_{n+1} \in \mathfrak{A}'.$$

Для всех $x \in X$ имеем оценку

$$Bx = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \circ A_k x + \alpha_{n+1} \circ A_{n+1} x \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \right) \circ A_1 x \vee \ldots$$
$$\ldots \vee A_n x + \alpha_{n+1} \circ A_{n+1} x.$$

Таким образом, выполняется

$$B - \alpha_{n+1} \circ A_{n+1} \in \partial \left(\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \right) \circ A_1 \vee \ldots \vee \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \right) \circ A_n \right).$$

Используя предложения II и III из пункта 2.2, найдем мультипликаторы $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \Lambda(Y)$ такие, что

$$\sum_{s=1}^{n} \beta_s = I_Y;$$

$$B - \alpha_{n+1} \circ A_{n+1} = \sum_{s=1}^{n} \beta_s \circ \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \right) \circ A_s.$$

Учитывая предложение II из предыдущего параграфа, получаем

$$B = \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \right) \circ \sum_{s=1}^{n} \beta_s \circ A_s + \alpha_{n+1} \circ A_{n+1}.$$

В силу сделанных предположений получаем:

$$\sum_{s=1}^{n} \beta_s \circ A_s \in \mathfrak{A}';$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \right) + \alpha_{n+1} = I_Y.$$

Таким образом, в силу операторной выпуклости множества $\mathfrak{A}'$ выполняется $B \in \mathfrak{A}'$, что и требовалось установить.

III. *Для всякого слабо порядково ограниченного множества* $\mathfrak{A}$ *существует наименьшее сильно операторно выпуклое множество* $\operatorname{stop}(\mathfrak{A})$, *содержащее* $\mathfrak{A}$. *При этом*

$$\operatorname{stop}(\mathfrak{A}) = \left\{ \sum_{\xi \in \Xi} \alpha_\xi \circ A_\xi : A_\xi \in \mathfrak{A},\ \alpha_\xi \in \Lambda(Y) \quad (\xi \in \Xi); \right.$$
$$\left. \sum_{\xi \in \Xi} \alpha_\xi = I_Y \right\}.$$

Существование множества $\operatorname{stop}(\mathfrak{A})$ следует из предложения I. Для доказательства второй части утверждения рассмотрим семейства

$$(\beta_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}; \quad (\alpha_\xi^\gamma)_{\xi \in \Xi(\gamma)}; \quad (A_\xi^\gamma)_{\xi \in \Xi(\gamma)}$$

такие, что выполняются условия

$$\beta_\gamma, \quad \alpha_\xi^\gamma \in \Lambda(Y); \quad A_\xi^\gamma \in \mathfrak{A};$$
$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \beta_\gamma = I_Y; \quad \sum_{\xi \in \Xi(\gamma)} \alpha_\xi^\gamma = I_Y; \quad \sum_{\xi \in \Xi(\gamma)} \alpha_\xi^\gamma \circ A_\xi^\gamma = A_\gamma \in \mathfrak{A}.$$

Воспользовавшись свойствами мультипликаторов и предложением I, получаем

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \beta_\gamma \circ A_\gamma = \sum_{\gamma \in \Gamma} \beta_\gamma \circ \sum_{\xi \in \Xi(\gamma)} \alpha_\xi^\gamma \circ A_\xi^\gamma =$$
$$= \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{\xi \in \Xi(\gamma)} \beta_\gamma \circ \alpha_\xi^\gamma \circ A_\xi^\gamma \in \mathfrak{A},$$

поскольку ясно, что

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{\xi \in \Xi(\gamma)} \beta_\gamma \circ \alpha_\xi^\gamma = I_Y.$$

Предложение доказано полностью.

Приведенные предложения показывают, что отображения $\mathfrak{A} \longrightarrow \operatorname{op}(\mathfrak{A})$ и $\mathfrak{A} \longrightarrow \operatorname{stop}(\mathfrak{A})$, определенные на совокупности слабо порядково ограниченных подмножеств $L(X, Y)$, являются операторами замыкания в смысле Мура. При этом выполняются включения

$$\mathfrak{A} \subset \operatorname{op}(\mathfrak{A}) \subset \operatorname{stop}(\mathfrak{A}) \subset \operatorname{cop}(\mathfrak{A}),$$

которые, вообще говоря, являются строгими. До сих пор открыт вопрос о возможности факторизации оператора cop через операторы op и stop. Точнее говоря, мало известно о представляющих существенный интерес ситуациях, когда оператор cop допускает представление в виде, скажем, оператора op и некоторого хорошего — например топологического — оператора замыкания. Мы остановимся здесь только на простейших модельных ситуациях, объясняющих пути исследования таких вопросов и характер возникающих здесь трудностей.

Следующий пример является ключевым.

Пример. Пусть Y — *дискретное* K-*пространство*, т. е. фундамент в произведении прямых $\mathbf{R}^{\mathfrak{B}}$. Заметим, что

$$(Y^{\mathfrak{A}})_\infty = \left\{y \in \mathbf{R}^{\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}} : \sup_{A\in\mathfrak{A}} |y(A, \cdot)| \in Y\right\}.$$

Рассмотрим множество $\mathfrak{P} = \{p_A : A \in \mathfrak{A}\}$, где p_A — *координатный проектор*, т. е. $p_A : (y_A)_{A\in\mathfrak{A}} \to y_A$. Очевидно, что канонический оператор $\varepsilon_{\mathfrak{A}}$ допускает следующее представление

$$\varepsilon_{\mathfrak{A}} = P_{\mathfrak{P}}.$$

При этом оператор $\alpha : (Y^{\mathfrak{A}})_\infty \to Y$ входит в $\partial(\varepsilon_{\mathfrak{A}})$ в том и только в том случае, если

$$\alpha y(B) = \int_{\mathfrak{A}} y(\cdot, B)\, d\mu_B,$$

где μ_B — конечно аддитивная вероятностная мера на алгебре подмножеств $\mathfrak{A}$.

Можно проверить, что $\alpha_0 \in \operatorname{stop}(\mathfrak{P})$ в том и только в том случае, если найдутся числа α_A^B такие, что

$$0 \leqslant \alpha_A^B \leqslant 1, \quad \sum_{A\in\mathfrak{A}} \alpha_A^B = 1;$$

$$\alpha_0 y(B) = \sum_{A\in\mathfrak{A}} \alpha_A^B y(A, B).$$

В то же время элементам из $\operatorname{op}(\mathfrak{P})$ отвечают семейства (α_A^B), у которых для всех A из дополнения конечного множества в $\mathfrak{A}$ выполняется $\alpha_A^B = 0$ для всех $B \in \mathfrak{B}$.

Если Y — фундамент в $\mathbf{R}^{\mathfrak{B}}$, то для всякого векторного пространства X пространство $L(X, Y)$ можно рассматривать как подпространство $L(X, \mathbf{R}^{\mathfrak{B}})$. Тем самым в $L(X, Y)$ возникает *простая операторная топология*, т. е. по определению топология, индуцированная в $L(X, Y)$ слабой операторной топологией пространства $L(X, \mathbf{R}^{\mathfrak{B}})$. Если же Y — подпространство в $l_\infty(\mathfrak{B})$, то имеет смысл наделять $L(X, Y)$ так называемой *сильной операторной топологией*, т. е. по определению τ-операторной топологией, где τ порождено канонической нормой в $l_\infty(\mathfrak{B})$.

Роль введенных топологий раскрывают следующие утверждения.

IV. *Если Y — фундамент в* $\mathbf{R}^{\mathfrak{B}}$ *то множество операторов является опорным в том и только в том случае, если оно слабо порядково ограничено, операторно выпукло и замкнуто в простой операторной топологии.*

V. *Если Y — фундамент в $l_\infty(\mathfrak{B})$, то множество операторов является опорным в том и только в том случае, если оно слабо порядково ограничено, сильно операторно выпукло и замкнуто в сильной операторной топологии.*

Предложения IV и V проверяются сходными способами, поэтому мы установим только V.

Пусть $\mathfrak{A}$ — слабо порядково ограниченное, сильно операторно выпуклое и замкнутое в сильной операторной топологии множество. Следует проверить, что $\operatorname{cop}(\mathfrak{A}) \subset \mathfrak{A}$.

Возьмем некоторый элемент $A \in \operatorname{cop}(\mathfrak{A})$. Используя результаты пункта **2.1**, найдем оператор $\alpha \in \partial(\varepsilon_{\mathfrak{A}})$, для которого $A = \alpha \circ \langle\mathfrak{A}\rangle$. Используя приведенный выше пример, построим сеть (α_γ) операторов из $\operatorname{stop}(\mathfrak{P}) \subset L^+((Y^{\mathfrak{A}})_\infty, Y)$ такую, что (α_γ) сходится к α в сильной операторной топологии.

Так как множество $\mathfrak{A}$ сильно операторно выпукло, то для каждого γ оператор $\alpha_\gamma \circ \langle\mathfrak{A}\rangle$ входит в $\mathfrak{A}$, ибо

$$\alpha_\gamma \circ \langle\mathfrak{A}\rangle = \sum_{\xi \in \Xi(\gamma)} \beta_\xi^\gamma \circ p_{A_\xi^\gamma} \circ \langle\mathfrak{A}\rangle = \sum_{\xi \in \Xi(\gamma)} \beta_\xi^\gamma \circ A_\xi^\gamma$$

для некоторых семейств

$$\beta_\xi^\gamma \in \Lambda(Y), \quad A_\xi^\gamma \in \mathfrak{A} \ (\xi \in \Xi(\gamma)); \quad \sum_{\xi \in \Xi(\gamma)} \beta_\xi^\gamma = I_Y.$$

Таким образом,

$$A=\alpha\circ\langle\mathfrak{A}\rangle=\lim_{\gamma}\alpha_\gamma\circ\langle\mathfrak{A}\rangle\in\mathfrak{A}$$

в силу замкнутости $\mathfrak{A}$ в сильной операторной топологии.

Тем самым мы установили достаточность приведенных условий. Их необходимость очевидна.

В случае непрерывных K-пространств ситуация, естественно, существенно усложняется. В то же время для некоторых классов операторов удается получать естественные факторизации.

VI. *Пусть Y — фундамент в K-пространстве непрерывных функций $C^{\mathfrak{B}}$ на экстремальном компакте $\mathfrak{B}$ и слабо порядково ограниченное множество $\mathfrak{A}$ компактно порождено, т. е. для некоторого компактного в сильной операторной топологии подмножества $\mathfrak{C}$ в $\mathfrak{A}$ выполняется $P_{\mathfrak{C}}=P_{\mathfrak{A}}$. Тогда множество $\mathfrak{A}$ является опорным в том и только в том случае, если оно операторно выпукло и замкнуто в простой операторной топологии.*

Следует проверить только, что для операторно выпуклого и замкнутого в соответствующем смысле множества $\mathfrak{A}$ выполняется

$$\operatorname{cop}(\mathfrak{C})=\operatorname{cop}(\mathfrak{A})\subset\mathfrak{A}.$$

Пусть A входит в $\operatorname{cop}(\mathfrak{C})$. Тогда, как мы видели раньше, для некоторого оператора $\alpha\in\partial(\varepsilon_{\mathfrak{C}})$ выполняется $A=\alpha\circ\langle\mathfrak{C}\rangle$. Отметим, что в силу компактности $\mathfrak{C}$ в сильной операторной топологии, для всякого $x\in X$ элемент $\langle\mathfrak{C}\rangle x$ лежит в пространстве $C_{\mathfrak{B}\times\mathfrak{C}}$. В самом деле, если $A_\gamma\to A_0$ и $q_\gamma\to q_0$, то выполняется

$$|A_\gamma x(q_\gamma)-A_0x(q_0)|\leqslant\|A_\gamma x-A_0x\|+$$
$$+|A_0x(q_\gamma)-A_0x(q_0)|\underset{\gamma}{\to}0.$$

Таким образом, достаточно считать, что α опорен к следу канонического оператора $\varepsilon_{\mathfrak{C}}$ на пространство $C_{\mathfrak{B}\times\mathfrak{C}}$.

Заметим, что для всякого $B\in\mathfrak{B}$ выполняется

$$\alpha y(B)=\int_{\mathfrak{B}\times\mathfrak{C}}y\,d\mu_B,$$

где μ_B — регулярная борелевская мера на $\mathfrak{B}\times\mathfrak{C}$, опорная к сублинейному функционалу

$$y \mapsto (\sup_{C\in\mathfrak{C}} y(C, \cdot))\ (B).$$

Несложно убедиться, используя регулярность μ_B, в том, что мера μ_B — вероятностная и имеет носитель в слое $\{B\}\times\mathfrak{C}$. Отсюда непосредственно вытекает, что α есть точка прикосновения операторно выпуклой оболочки набора координатных проекторов $\{p_C : C\in\mathfrak{C}\}$ в простой операторной топологии.

Таким образом,

$$\alpha\circ\langle\mathfrak{C}\rangle = \lim_{\xi} \sum_{k=1}^{n(\xi)} \alpha_k^{\xi}\circ p_{C_k^{\xi}}\circ\langle\mathfrak{C}\rangle = \lim_{\xi}\sum_{k=1}^{n(\xi)} \alpha_k^{\xi}\circ C_k^{\xi}\in\mathfrak{A}$$

для соответствующих семейств, что и требовалось доказать.

II.2.5. Применим теперь полученные результаты для вычисления опорных множеств некоторых составных сублинейных операторов.

Теорема 3(2.II). *Пусть $P_1 : X \mapsto Y$ — сублинейный оператор, а $P_2 : Y \mapsto Z$ — возрастающий сублинейный оператор. Тогда*

$$\partial(P_2\circ P_1) = \{A\circ\langle\partial(P_1)\rangle : A\bullet\Delta_{\partial(P_1)}\in\partial(P_2),$$
$$A\in L^+((Y^{\partial(P_1)})_\infty, Z)\}.$$

При этом, если $\partial(P_1) = \operatorname{cop}(\mathfrak{A}_1)$ и $\partial(P_2) = \operatorname{cop}(\mathfrak{A}_2)$, то

$$\partial(P_2\circ P_1) = \{A\circ\langle\mathfrak{A}_1\rangle : \exists\alpha_2\in\partial(\varepsilon_{\mathfrak{A}_2})\ A\circ\Delta_{\mathfrak{A}_1} = \alpha_2\circ\langle\mathfrak{A}_2\rangle,$$
$$A\in L^+((Y^{\mathfrak{A}_1})_\infty, Z)\}.$$

Доказательство. В силу леммы из пункта 2.1 справедливо представление

$$P_2\circ P_1 = P_2\circ\varepsilon_{\mathfrak{A}_1}\circ\langle\mathfrak{A}_1\rangle.$$

Следовательно, привлекая результаты пункта 2.2, последовательно получаем

$$\partial(P_2\circ P_1) = \partial(P_2\circ\varepsilon_{\mathfrak{A}_1}\circ\langle\mathfrak{A}_1\rangle) = \partial(P_2\circ\varepsilon_{\mathfrak{A}_1})\circ\langle\mathfrak{A}_1\rangle =$$
$$= \{A\in L^+((Y^{\mathfrak{A}_1})_\infty, Z) : A\bullet\Delta_{\mathfrak{A}_1}\in\partial(P_2)\}\circ\langle\mathfrak{A}_1\rangle =$$

$$= \{A \circ \langle \mathfrak{A}_1 \rangle : \exists \alpha_2 \in \partial (\varepsilon_{\mathfrak{A}_2}) \; A \circ \Delta_{\mathfrak{A}_1} = \alpha_2 \circ \langle \mathfrak{A}_2 \rangle, \\ A \in L^+ ((Y^{\mathfrak{A}_1})_\infty, Z)\},$$

что и требовалось доказать.

Некоторые важные для приложений следствия этой теоремы оформим в виде предложений.

I. *Для любого проектора* Pr *в К-пространстве* Y *выполняется*

$$\partial (P_2 \circ P_1) = \bigcup_{A \in \partial (P_2)} \left(\partial (A \circ \mathrm{Pr} \circ P_1) + \partial \left(A \circ \mathrm{Pr}^d \circ P_1\right)\right),$$

где $\mathrm{Pr}^d = I_Y - \mathrm{Pr}$ — *проектор, дополнительный к* Pr. *В частности,*

$$\partial (P_2 \circ P_1) = \bigcup_{A \in \partial (P_2)} \partial (A \circ P_1).$$

По теореме 3 имеем

$$\partial (P_2 \circ P_1) = \{B \circ \langle \partial (P_1) \rangle : B \circ \Delta_{\partial (P_1)} \in \partial (P_2), \\ B \in L^+ ((Y^{\partial (P_1)})_\infty, Z)\}.$$

Положим $Y_0 = \mathrm{Pr}[Y]$. Заметим, что $((Y_0)^{\partial (P_1)})_\infty$ — компонента в пространстве $(Y^{\partial (P_1)})_\infty$. Обозначим через $\widetilde{\mathrm{Pr}}_0$ проектор на эту компоненту. Непосредственно из определений вытекает

$$\mathrm{Pr}_0 \circ \Delta_{\partial (P_1)} = \Delta_{\partial (P_1)} \circ \mathrm{Pr}.$$

Пусть для некоторого $B \in L^+ ((Y^{\partial (P_1)})_\infty, Z)$ выполняется соотношение $B \circ \Delta_{\partial (P_1)} \in \partial (P_2)$. Положим

$$A = B \circ \Delta_{\partial (P_1)}.$$

Тогда, очевидно, выполняется

$$A \circ \mathrm{Pr} = B \circ \Delta_{\partial (P_1)} \circ \mathrm{Pr} = B \circ \mathrm{Pr}_0 \circ \Delta_{\partial (P_1)};$$
$$A \circ \mathrm{Pr}^d = B \circ \Delta_{\partial (P_1)} \circ \mathrm{Pr}^d = B \circ \mathrm{Pr}_0^d \circ \Delta_{\partial (P_1)}.$$

Поскольку

$$B \circ \langle \partial (P_1) \rangle = B \circ \mathrm{Pr}_0 \circ \langle \partial (P_1) \rangle + B \circ \mathrm{Pr}_0^d \circ \langle \partial (P_1) \rangle$$

и по теореме 3 справедливы соотношения

$$B\circ\mathrm{Pr}_0\circ\langle\partial(P_1)\rangle\in\partial(A\circ\mathrm{Pr}\circ P_1);$$
$$B\circ\mathrm{Pr}_0^d\circ\langle\partial(P_1)\rangle\in\partial\left(A\circ\mathrm{Pr}^d\circ P_1\right),$$

то выполняется включение

$$\partial(P_2\circ P_1)\subset\bigcup_{A\in\partial(P_2)}\left(\partial(A\circ\mathrm{Pr}\circ P_1)+\partial\left(A\circ\mathrm{Pr}^d\circ P_1\right)\right).$$

Обратное включение очевидно.

II. *Пусть* $P_1, \ldots, P_n : X \longrightarrow Y$ — *сублинейные операторы. Тогда справедливы представления*

$$\partial(P_1+\ldots+P_n)=\partial(P_1)+\ldots+\partial(P_n);$$
$$\partial(P_1\vee\ldots\vee P_n)=\bigcup_{\substack{\alpha_1\geqslant 0,\ldots,\alpha_n\geqslant 0\\ \alpha_1+\ldots+\alpha_n=I_Y}}(\alpha_1\circ\partial(P_1)+\ldots$$
$$\ldots+\alpha_n\circ\partial(P_n)),$$

где, как обычно, $P_1\vee\ldots\vee P_n : x\longrightarrow P_1x\vee\ldots\vee P_nx$.

Определим следующие операторы:

$$Q_1 : X\longrightarrow Y^n;\ Q_2 : Y^n\longrightarrow Y;\ Q_3 : Y^n\longrightarrow Y;$$
$$Q_1x=(P_1x, \ldots, P_nx);$$
$$Q_2(y_1, \ldots, y_n)=y_1+\ldots+y_n;$$
$$Q_3(y_1, \ldots, y_n)=y_1\vee\ldots\vee y_n.$$

Таким образом, Q_1, Q_2, Q_3 — сублинейные операторы, причем

$$P_1+P_2+\ldots+P_n=Q_2\circ Q_1;$$
$$P_1\vee P_2\vee\ldots\vee P_n=Q_3\circ Q_1.$$

Заметим, что

$$\partial(Q_1)=\partial(P_1)\times\ldots\times\partial(P_n)=\{(A_1, \ldots, A_n) : A_1\in$$
$$\in\partial(P_1), \ldots, A_n\in\partial(P_n)\}.$$

Субдифференциалы операторов Q_2 и Q_3, как видно, вычислены ранее. Отсюда последовательным применением предложения I получаем требуемое представление для опорного множества суммы и, кроме того, следующее представление:

$$\partial(P_1 \vee \dots \vee P_n) = \bigcup_{\substack{\alpha_1 \geqslant 0, \dots, \alpha_n \geqslant 0 \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_n = I_Y}} (\partial(\alpha_1 \circ P_1) + \dots$$

$$\dots + \partial(\alpha_n \circ P_n)).$$

Для завершения доказательства следует только заметить, что

$$\partial(\alpha \circ P) = \alpha \circ \partial(P)$$

для любого сублинейного оператора P и произвольного мультипликатора $\alpha \in \Lambda(Y)$.

Для доказательства последнего соотношения заметим, что включение $\alpha \circ \partial(P) \subset \partial(\alpha \circ P)$ очевидно. Поэтому возьмем A из $\partial(\alpha \circ P)$ и покажем, что $A \in \alpha \circ \partial(P)$.

Очевидно, что $A[X] \subset \alpha[Y]$ в силу результатов пункта **2.3.** Поэтому достаточно рассмотреть лишь тот случай, когда $\operatorname{Ker}(\alpha) = \{0\}$. Но в последней ситуации, как мы установили ранее, определен положительный оператор $\alpha^{-1} : \alpha[Y] \longrightarrow Y$, обратный к α. Таким образом, $A = \alpha \circ \alpha^{-1} \circ A$ и оператор $\alpha^{-1} \circ A$ опорен к P. Предложение доказано.

III. *Пусть X — векторная решетка, Y — некоторое K-пространство и $T \in L^+(X, Y)$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *Оператор T сохраняет т. в. г. конечных множеств.*

(2) *Для любого оператора $T' \in L^+(X, Y)$ такого, что $T' \leqslant T$, найдется мультипликатор $\alpha \in \Lambda(Y)$ такой, что $T' = \alpha \circ T$.*

Рассмотрим сублинейные операторы P_1, $P_2 : X^2 \longrightarrow Y$, определенные соотношениями

$$P_1(x_1, x_2) = T(x_1 \vee x_2); \; P_2(x_1, x_2) = Tx_1 \vee Tx_2.$$

Условие, что T сохраняет т. в. г. конечных множеств, по определению означает равенство $\partial(P_1) = \partial(P_2)$, откуда и вытекает требуемый результат.

В заключение этого пункта в качестве примера применения леммы Мазура — Орлича установим *векторную теорему о минимаксе.*

IV. *Пусть* $P: X \longrightarrow Y$ — *сублинейный оператор и* U — *выпуклое множество в* X. *Справедливо равенство*

$$\sup_{A \in \partial(P)} \inf_{x \in U} Ax = \inf_{x \in U} \sup_{A \in \partial(P)} Ax.$$

Прежде всего заметим, что левая часть рассматриваемого соотношения всегда меньше правой. Поэтому нуждается в проверке лишь тот случай, когда существует $y \in Y$ такой, что

$$y = \inf_{x \in U} \sup_{A \in \partial(P)} Ax = \inf_{x \in U} Px.$$

Пусть сначала $y = 0$. Тогда срезка P на коническую оболочку U положительна и в силу леммы Мазура — Орлича найдется $A_0 \in \partial(P)$ такой, что $A_0|_U \geqslant 0$. Стало быть,

$$\sup_{A \in \partial(P)} \inf_{x \in U} Ax \geqslant \inf_{x \in U} A_0 x \geqslant 0 = y,$$

что и нужно. Осталось рассмотреть случай, когда y — произвольный элемент Y.

Положим $X_1 = X \times \mathbf{R}$ и пусть $U_1 = U \times \{1\}$. Для оператора $A \in L(X, Y)$ и элемента $x_1 = (x, t) \in X_1$ положим $A_1 x_1 = Ax$. В пространстве $L(X_1, Y)$ рассмотрим множество $\mathfrak{A}_1 = \{A_1 \in L(X_1, Y) : A \in \partial(P)\}$ и введем оператор $B_1(x, t) = -ty$. Имеем

$$\inf_{x_1 \in U_1} \sup_{A_1 \in \mathfrak{A}_1} (A_1 + B_1) x_1 = \inf_{x_1 \in U_1} \sup_{A_1 \in \mathfrak{A}_1} (A_1 x_1 - y) =$$

$$= \inf_{x_1 \in U_1} \sup_{A_1 \in \mathfrak{A}_1} A_1 x_1 - y = \inf_{x \in U} \sup_{A \in \partial(P)} Ax - y = 0.$$

Установим еще, что $\mathfrak{A}_1 = \partial(P_1)$, где $P_1(x, t) = Px$.

В самом деле, если $A_1 \in \mathfrak{A}_1$, то для $(x, t) \in X_1$ имеем

$$A_1 x_1 = A_1(x, t) = Ax \leqslant Px = P_1(x, t) = P_1 x_1.$$

Если же $C \in \partial(P_1)$, то $C(\cdot, 0) \in \partial(P)$ и, кроме того, $C(0, \cdot) = 0$, так что $C = C(\cdot, 0)_1$. Таким образом, в силу уже установленного имеем

$$0 = \sup_{A_1 \in \mathfrak{A}_1} \inf_{x_1 \in U_1} (A_1 + B_1) x_1 =$$

$$= \sup_{A_1 \in \mathfrak{A}_1} \inf_{x_1 \in U_1} (A_1 x_1 - y) = \sup_{A \in \partial(P)} \inf_{x \in U} Ax - y.$$

В пункте **3.6** мы вскроем общий механизм, управляющий утверждениями типа векторных теорем о минимаксе.

§ 3. СУБДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫПУКЛЫХ ОПЕРАТОРОВ

Основной нашей целью в этом параграфе будет вычисление в явном виде субдифференциалов выпуклых операторов. Сначала мы изложим методы исследования таких операторов во внутренней точке эффективного множества, а затем перейдем к общему случаю, в котором приходится привлекать специфические приемы анализа.

II.3.1. Пусть U — выпуклое множество в векторном пространстве X. Элемент $h \in X$ называется *допустимым направлением* в точке $x^* \in U$, если найдется число $\alpha^* > 0$ такое, что $x^* + \alpha h \in U$ для всех $\alpha \in [0, \alpha^*]$. Совокупность всех допустимых направлений в точке x^* образует конус $\mathrm{Fd}_{x^*}(U)$, называемый *конусом допустимых направлений* в точке x^*.

Рассмотрим теперь некоторое K-пространство Y и точку x^* из $\mathrm{dom}(F)$, где $F: X \to Y \cup \{+\infty\}$ — выпуклый оператор. Для всякого $h \in \mathrm{Fd}_{x^*}(\mathrm{dom}(F))$ положим

$$z_{x^*,h}(\alpha) = (F(x^* + \alpha h) - Fx^*)/\alpha.$$

Заметим, что функция $\alpha \to z_{x^*,h}(\alpha)$, определенная в некотором интервале $(0, \alpha^*)$, возрастает. Действительно, если $0 < \alpha < \beta < \alpha^*$, то выполняется

$$z_{x^*,h}(\beta) - z_{x^*,h}(\alpha) = z_{x^*,h}(\beta) - \alpha^{-1}(F((\beta - \alpha)\beta^{-1}x^* + \alpha\beta^{-1}(x^* + \alpha h)) - Fx^*) \geqslant z_{x^*,h}(\beta) - \alpha^{-1}(\beta^{-1}(\beta - \alpha)Fx^* + \beta^{-1}\alpha(F(x^* + \beta h) - Fx^*)) = 0.$$

Предположим теперь, что $\partial_{x^*}(F) \neq \varnothing$. Тогда для всякого направления $h \in \mathrm{Fd}_{x^*}(\mathrm{dom}(F))$ выполняется

$$z_{x^*,h}(\alpha) = (F(x^* + \alpha h) - Fx^*)/\alpha \geqslant (A(x^* + \alpha h) - Ax^*)/\alpha = Ah$$

для любого $A \in \partial_{x^*}(F)$. Таким образом, на конусе допустимых направлений определен оператор

$$F'(x^*): h \mapsto (o)\text{-}\lim_{\alpha \downarrow 0} (F(x^* + \alpha h) - Fx^*)/\alpha.$$

Этот оператор называется *производной оператора* F *по допустимым направлениям* в точке x^*. Итак, $F'(x^*)h = = \inf\{z_{x^*,h}(\alpha)\colon 0<\alpha<\alpha^*\}$.

Нам потребуются некоторые свойства производной по направлениям.

I. *Если* $\partial_{x^*}(F)\neq\varnothing$, *то* $F'(x^*)$ — *сублинейный оператор, определенный на конусе* $\mathrm{Fd}_{x^*}(\mathrm{dom}(F))$, *причем*

$$\partial_{x^*}(F)=\partial(F'(x^*)).$$

Действительно, если $\beta>0$, то

$$F'(x^*)(\beta h)=(o)\text{-}\lim_{\alpha\downarrow 0}(F(x^*+\alpha\beta h)-Fx^*)/\alpha=$$
$$=\beta(o)\text{-}\lim_{\alpha\downarrow 0}(F(x^*+\alpha\beta h)-Fx^*)/\alpha\beta=\beta F'(x^*)h.$$

Если же h_1, h_2 — допустимые направления, то в силу выпуклости оператора F выполняется

$$F'(x^*)(h_1+h_2)=2(o)\text{-}\lim_{\alpha\downarrow 0}(F(x^*+\alpha(h_1/2+$$
$$+h_2/2))-Fx^*)/\alpha\leqslant$$
$$\leqslant(o)\text{-}\lim_{\alpha\downarrow 0}(F(x^*+\alpha h_1)-Fx^*)+(o)\text{-}\lim_{\alpha\downarrow 0}(F(x^*+$$
$$+\alpha h_2)-Fx^*)/\alpha,$$

что доказывает сублинейность оператора $F'(x^*)$.

Если теперь оператор A таков, что $Ax-Ax^*\leqslant Fx-Fx^*$ для всех $x\in X$, то для любого допустимого направления h и при достаточно малых $\alpha>0$ выполняется $\alpha Ah\leqslant \leqslant F(x^*+\alpha h)-Fx^*$, т. е. $A\in\partial(F'(x^*))$. Если же $A\in \in\partial(F'(x^*))$, то $Ax-Ax^*\leqslant F'(x^*)(x-x^*)\leqslant Fx-Fx^*$ для всех $x\in\mathrm{dom}(F)$. Таким образом, $\partial(F'(x^*))=\partial_{x^*}(F)$, что и требовалось установить.

II. *Если* x^* — *внутренняя точка* $\mathrm{dom}(F)$, *т. е. множество* $\mathrm{dom}(F)-x^*$ *является поглощающим, то* $\partial_{x^*}(F)\neq\varnothing$, *при этом* $\mathrm{dom}(F'(x^*))=X$. *Если к тому же* X *является* K*-пространством*, $\mathrm{dom}(F)=X$ *и* F — (o)*-непрерывен в точке* x^*, *то оператор* $F'(x^*)$ *является* (o)*-непрерывным на* X.

Действительно, в силу определений для произвольного $h\in X$ и достаточно малых $\alpha>0$ выполняется

$$-z_{x^*,-h}(\alpha)\leqslant -F'(x^*)(-h)\leqslant F'(x^*)h\leqslant z_{x^*,h}(\alpha),$$

что обеспечивает (o)-непрерывность оператора $F'(x^*)$ в нуле. Осталось заметить, что для любого сублинейного оператора P справедлива оценка

$$|Px-Py| \leqslant P(x-y) \vee P(y-x),$$

применение которой в нашей ситуации обеспечивает требуемое.

III. *Пусть* X_1, X — *векторные пространства*, Y — *некоторое* K-*пространство*, $A \in L(X_1, X)$ *и* $F: X \longrightarrow Y \cup \{+\infty\}$ — *выпуклый оператор, причем для некоторой точки* $x \in X$ *элемент* $Ax_1^* + x$ *является внутренним в эффективном множестве* $\operatorname{dom}(F)$. *Рассмотрим аффинный оператор* $A_x: x_1 \longrightarrow Ax_1 + x$. *Тогда*

$$\partial_{x_1^*}(F \circ A_x) = \partial_{A_x x_1^*}(F) \circ A.$$

Для любого $h \in X_1$ выполняется

$$(F \circ A_x)'(x_1^*)\, h = (o)\text{-}\lim_{\alpha \downarrow 0}\big(F(Ax_1^* + \alpha Ah + x) - \\ - F(Ax_1^* + x)\big)/\alpha = F'(A_x x_1^*)\, Ah.$$

Таким образом, справедливо представление

$$(F \circ A_x)'(x_1^*) = F'(A_x x_1^*) \circ A.$$

Требуемое утверждение теперь вытекает из **1.5**.

IV. *Пусть* Y, Z — *некоторые* K-*пространства*, $F: X \to Y \cup \{+\infty\}$ — *выпуклый оператор и* $G: Y \to Z \cup \{+\infty\}$ — *возрастающий выпуклый оператор. Допустим, что* $\operatorname{dom}(G) = Y$, *причем* x^* — *внутренняя точка* $\operatorname{dom}(F)$. *Если оператор* G *является* (o)-*непрерывным в точке* Fx^*, *то справедливо представление*

$$(G \circ F)'(x^*) = G'(Fx^*) \circ F'(x^*).$$

Прежде всего заметим, что для всякого $x \in X$ выполняется

$$F(x^* + \alpha x) = Fx^* + \alpha F'(x^*)x + \alpha z(\alpha, x),$$

где $z(\alpha, x) \downarrow 0$ при $\alpha \downarrow 0$. В самом деле, достаточно положить $z(\alpha, x) = z_{x^*, x}(\alpha) - F'(x^*)x$.

По аналогичным причинам для всякого $y \in Y$ выполняется

$$G(Fx^* + \alpha y) = G(Fx^*) + \alpha G'(Fx^*) y + \alpha w(\alpha, y),$$

где $w(\alpha, y) \downarrow 0$ при $\alpha \downarrow 0$.

Зафиксировав теперь достаточно малое положительное число α_0, при всех $0 < \alpha \leqslant \alpha_0$ из-за монотонности G имеем

$$\begin{gathered} G \circ F(x^* + \alpha x) - G \circ Fx^* = \\ = G(Fx^* + \alpha F'(x^*) x + \alpha z(\alpha, x)) - G(Fx^*) \leqslant \\ \leqslant G(Fx^* + \alpha F'(x^*) x + \alpha z(\alpha_0, x)) - G(Fx^*) = \\ = \alpha G'(Fx^*)(F'(x^*) x + z(\alpha_0, x)) + \alpha w(\alpha, F'(x^*) x + \\ + z(\alpha_0, x)) \leqslant \\ \leqslant \alpha G'(Fx^*) \circ F'(x^*) x + \alpha (G'(Fx^*) z(\alpha_0, x) + \\ + w(\alpha, F'(x^*) x + z(\alpha_0, x))). \end{gathered}$$

По тем же причинам

$$\begin{gathered} G \circ F(x^* + \alpha x) - G \circ Fx^* \geqslant \\ \geqslant G(Fx^* + \alpha F'(x^*) x) - G(Fx^*) = \\ = \alpha G'(Fx^*) \circ F'(x^*) x + \alpha w(\alpha, F'(x^*) x). \end{gathered}$$

Окончательно двусторонние оценки будут следующие:

$$\begin{gathered} G'(Fx^*) \circ F'(x^*) x + w(\alpha, F'(x^*) x) \leqslant \\ \leqslant (G \circ F(x^* + \alpha x) - G \circ Fx^*)/\alpha \leqslant \\ \leqslant G'(Fx^*) \circ F'(x^*) x + G'(Fx^*) z(\alpha_0, x) + w(\alpha, F'(x^*) x + \\ + z(\alpha_0, x)). \end{gathered}$$

Переходя к пределу при $\alpha \downarrow 0$, получаем

$$G'(Fx^*) \circ F'(x^*) x \leqslant (G \circ F)'(x^*) x \leqslant G'(Fx^*) \circ F'(x^*) x + \\ + G'(Fx^*) z(\alpha_0, x).$$

Последнее неравенство справедливо при всяком $\alpha_0 > 0$. Значит, привлекая предложение II, получаем требуемое.

II.3.2. Перейдем теперь к вычислению в явном виде некоторых субдифференциалов.

Теорема 4(3.II). *Пусть* $F: X \to Y \cup \{+\infty\}$ — *выпуклый оператор,* $G: Y \to Z \cup \{+\infty\}$ — *возрастающий выпуклый оператор, причем* $\mathrm{dom}(G) \supset F[\mathrm{dom}(F)]$. *Если* x^* — *внутренняя точка* $\mathrm{dom}(F)$, *точка* Fx^* — *внутренняя в* $\mathrm{dom}(G)$, *причем* $G'(Fx^*)$ *является* (o)-*непрерывным, то*

$$\partial_{x^*}(G \circ F) = \{A \circ \langle \partial_{x^*}(F) \rangle : A \circ \Delta_{\partial_{x^*}(F)} \in \partial_{Fx^*}(G);$$
$$A \in L^+((Y^{\partial_{x^*}(F)})_\infty, Z)\}.$$

Доказательство. Как мы видели, предложение IV пункта **3.1** использует только (o)-непрерывность оператора $G'(Fx^*)$. Таким образом, привлекая предложение I пункта **3.1** и теорему 3, последовательно получаем

$$\partial_{x^*}(G \circ F) = \partial((G \circ F)'(x^*)) = \partial(G'(Fx^*) \circ F'(x^*)) =$$
$$= \{A \circ \langle \partial(F'(x^*)) \rangle : A \circ \Delta_{\partial(F'(x^*))} \in \partial(G'(Fx^*));$$
$$A \in L^+((Y^{\partial(F'(x^*))})_\infty, Z)\}.$$

Осталось заметить, что $\partial_{x^*}(F) = \partial(F'(x^*))$ и $\partial_{Fx^*}(G) = \partial(G'(Fx^*))$.

Следствие. *Для любого проектора* Pr *в* K-*пространстве* Y *выполняется*

$$\partial_{x^*}(G \circ F) = \bigcup_{A \in \partial_{Fx^*}(G)} (\partial_{x^*}(A \circ \mathrm{Pr} \circ F) + \partial_{x^*}(A \circ \mathrm{Pr}^d \circ F)).$$

В частности, справедливо представление

$$\partial_{x^*}(G \circ F) = \bigcup_{A \in \partial_{Fx^*}(G)} \partial_{x^*}(A \circ G).$$

Отметим, что представления, приведенные в следствии теоремы 4, носят существенно менее тонкий характер, чем «интегральное» представление, установленное этой теоремой. По этой причине утверждения следствия справедливы в более общих ситуациях, к обсуждению которых мы вернемся ниже.

Для приложений полезно уточнить смысл полученной в теореме 4 формулы.

Теорема 5(3.II). *Пусть* $F: X \to Y \cup \{+\infty\}$ — *выпуклый оператор,* $G: Y \to Z \cup \{+\infty\}$ — *возрастающий вы-*

пуклый оператор, причем $\operatorname{dom}(G) \supset F[\operatorname{dom}(F)]$, *точка* x^* *является внутренней в* $\operatorname{dom}(F)$, *а точка* Fx^* — *внутренней в* $\operatorname{dom}(G)$.

Рассмотрим оператор $F_\varepsilon : X \to Y \cup \{+\infty\}$ — *локальную аппроксимацию оператора* F, *определенную соотношением*

$$F_\varepsilon : x \to \sup\{Ax - Ax^* + Fx^* : A \in \partial_{x^*}(F)\}.$$

Тогда F_ε — *выпуклый оператор*, $\operatorname{dom}(F_\varepsilon) = X$, *причем*

$$\partial_{x^*}(F_\varepsilon) = \partial_{x^*}(F);$$

$$\partial_{x^*}(G \circ F_\varepsilon) = \{A \circ \langle \partial_{x^*}(F) \rangle : A \circ \Delta_{\partial_{x^*}(F)} \in \partial_{Fx^*}(G);$$

$$A \in L^+ \left(\left(Y^{\partial_{x^*}(F)} \right)_\infty, Z \right) \};$$

$$(G \circ F_\varepsilon)'(x^*) = G'(Fx^*) \circ F'(x^*).$$

Доказательство. Прежде всего, заметим, что для локальной аппроксимации F_ε оператора F справедливо представление

$$F_\varepsilon : x \longrightarrow Fx^* + F'(x^*)(x - x^*).$$

Таким образом, для производных по направлениям получаем

$$(G \circ F_\varepsilon)'(x^*)x =$$
$$= (o)\text{-}\lim_{\alpha \downarrow 0} \alpha^{-1}(G(F_\varepsilon(x^* + \alpha x)) - G \circ F_\varepsilon x^*) =$$
$$= (o)\text{-}\lim_{\alpha \downarrow 0} \alpha^{-1}(G(Fx^* + F'(x^*)(\alpha x)) - G(Fx^*)) =$$
$$= G'(Fx^*) \circ F'(x^*)x.$$

Оставшаяся часть теоремы очевидна.

Замечание 1. Для доказательства теоремы 5, вообще говоря, нет надобности прибегать к производным по направлениям. Достаточно просто свернуть выражение для субдифференциала суперпозиции и воспользоваться справедливостью следующего представления:

$$F_\varepsilon = \varepsilon_{\mathfrak{A}} \circ \langle \mathfrak{A} \rangle_y;$$

$$\mathfrak{A} = \partial_{x^*}(F); \quad y = \Delta_{\mathfrak{A}} Fx^* - \langle \mathfrak{A} \rangle x^*.$$

Мы приведем соответствующее построение в существенно более важной ситуации.

Пусть $\mathfrak{A}$ — слабо порядково ограниченное множество в пространстве $L(X, Y)$ и y — элемент $\left(Y^{\mathfrak{A}}\right)_\infty$. Оператор

$F: X \to Y \cup \{+\infty\}$ называется *регулярным*, если он допускает представление $F = \varepsilon_{\mathfrak{A}} \circ \langle \mathfrak{A} \rangle_y$ для некоторых $\mathfrak{A}$ и y.

I. *Пусть* $F: X \to Y \cup \{+\infty\}$ — *регулярный выпуклый оператор и* $G: Y \to Z \cup \{+\infty\}$ — *возрастающий выпуклый оператор, причем точка Fx^* является внутренней в* $\operatorname{dom}(G)$. *Тогда*

$$\partial_{x^*}(G \circ F) = \{A \circ \langle \mathfrak{A} \rangle : A \in L^+((Y^{\mathfrak{A}})_\infty, Z);$$
$$A \circ \Delta_{\mathfrak{A}} \in \partial_{Fx^*}(G);\ A \circ \langle \mathfrak{A} \rangle_y x^* = A \circ \Delta_{\mathfrak{A}} F x^*\}.$$

В силу предложения III пункта 3.1 имеем

$$\partial_{x^*}(G \circ F) = \partial_{x^*}\left(G \circ \varepsilon_{\mathfrak{A}} \circ \langle \mathfrak{A} \rangle_y\right) = \partial_{\langle \mathfrak{A} \rangle_y x^*}\left(G \circ \varepsilon_{\mathfrak{A}}\right) \circ \langle \mathfrak{A} \rangle.$$

Положим $\langle \mathfrak{A} \rangle_y x^* = y^*$ и установим, что

$$\partial_{y^*}\left(G \circ \varepsilon_{\mathfrak{A}}\right) = \{A \in L^+((Y^{\mathfrak{A}})_\infty, Z) : A \circ \Delta_{\mathfrak{A}} \in \partial_{\varepsilon_{\mathfrak{A}} y^*}(G);$$
$$Ay^* = A \circ \Delta_{\mathfrak{A}} \circ \varepsilon_{\mathfrak{A}} y^*\}.$$

Действительно, пусть сначала для всех $y \in (Y^{\mathfrak{A}})_\infty$ выполняется

$$Ay - Ay^* \leqslant G \circ \varepsilon_{\mathfrak{A}} y - G \circ \varepsilon_{\mathfrak{A}} y^*.$$

Для элемента $h \in (Y^{\mathfrak{A}})_\infty$ такого, что $h \leqslant \mathbf{0}$, при достаточно малых $\alpha > 0$ элемент $y^* + \alpha h$ входит в $\operatorname{dom}(G \circ \varepsilon_{\mathfrak{A}})$, причем

$$\alpha A h \leqslant G \circ \varepsilon_{\mathfrak{A}}(y^* + \alpha h) - G \circ \varepsilon_{\mathfrak{A}} y^* \leqslant \mathbf{0},$$

так что $A \in L^+((Y^{\mathfrak{A}})_\infty, Z)$.

В силу очевидных соотношений

$$\Delta_{\mathfrak{A}} \circ \varepsilon_{\mathfrak{A}} \geqslant I_{(Y^{\mathfrak{A}})_\infty};$$
$$\varepsilon_{\mathfrak{A}} \circ \Delta_{\mathfrak{A}} = I_Y$$

для элемента $\Delta_{\mathfrak{A}} \circ \varepsilon_{\mathfrak{A}} y^*$ выполняется

$$\mathbf{0} \leqslant A \circ \Delta_{\mathfrak{A}} \circ \varepsilon_{\mathfrak{A}} y^* - Ay^* \leqslant G\left(\varepsilon_{\mathfrak{A}} \circ \Delta_{\mathfrak{A}} \circ \varepsilon_{\mathfrak{A}} y^*\right) - G \circ \varepsilon_{\mathfrak{A}} y^* = \mathbf{0}.$$

Кроме того, для любого $y_0 \in Y$ получаем

$$A \circ \Delta_{\mathfrak{A}} y_0 - A \circ \Delta_{\mathfrak{A}} \circ \varepsilon_{\mathfrak{A}} y^* = A \circ \Delta_{\mathfrak{A}} y_0 - Ay^* \leqslant$$
$$\leqslant G \circ \varepsilon_{\mathfrak{A}} \circ \Delta_{\mathfrak{A}} y_0 - G \circ \varepsilon_{\mathfrak{A}} y^* = Gy_0 - G \circ \varepsilon_{\mathfrak{A}} y^*,$$

так что $A \circ \Delta_{\mathfrak{A}} \in \partial_{\varepsilon_{\mathfrak{A}} y^*}(G)$.

Пусть, наоборот, известно, что

$$A \in L^+\left((Y^{\mathfrak{A}})_\infty, Z\right); \quad A \circ \Delta_{\mathfrak{A}} \in \partial_{\varepsilon_{\mathfrak{A}} y^*}(G);$$
$$A \circ \Delta_{\mathfrak{A}} \circ \varepsilon_{\mathfrak{A}} y^* = Ay^*.$$

Тогда для $y \in (Y^{\mathfrak{A}})_\infty$ справедливы соотношения

$$Ay - Ay^* = Ay - A \circ \Delta_{\mathfrak{A}} \circ \varepsilon_{\mathfrak{A}} y^* \leqslant A \circ \Delta_{\mathfrak{A}} (\varepsilon_{\mathfrak{A}} y) -$$
$$- A \circ \Delta_{\mathfrak{A}} (\varepsilon_{\mathfrak{A}} y^*) \leqslant G \circ \varepsilon_{\mathfrak{A}} y - G \circ \varepsilon_{\mathfrak{A}} y^*,$$

означающие вхождение $A \in \partial_{y^*}(G \circ \varepsilon_{\mathfrak{A}})$.

Таким образом, учитывая, что $\varepsilon_{\mathfrak{A}} \circ \langle \mathfrak{A} \rangle_y x^* = Fx^*$, окончательно получаем

$$\partial_{x^*}(G \circ F) = \partial_{\langle \mathfrak{A} \rangle_y x^*}(G \circ \varepsilon_{\mathfrak{A}}) \circ \langle \mathfrak{A} \rangle =$$
$$= \{A \in L^+\left((Y^{\mathfrak{A}})_\infty, Z\right) : A \circ \Delta_{\mathfrak{A}} \in \partial_{Fx^*}(G);$$
$$A \circ \langle \mathfrak{A} \rangle_y x^* = A \circ \Delta_{\mathfrak{A}} F x^*\} \circ \langle \mathfrak{A} \rangle,$$

что и требовалось.

Замечание 2. Полученное предложение показывает, что даже регулярность F не обеспечивает, вообще говоря, справедливости заключения теоремы 4 без дополнительных предположений о G. Анализируя полученную формулу, нетрудно подобрать конкретные примеры. Приведем один из них.

Пусть $X = l_\infty(\mathbf{N})$ — пространство ограниченных последовательностей и $G : X \to \mathbf{R}$ — *банахов предел*, т. е.

$$G \in \partial\left(x \longrightarrow \overline{\lim_n}\, x(n)\right).$$

В качестве $F : X \to X$ возьмем оператор $Fx = x^+$, т. е.

$$F = \varepsilon_{\{0, I_X\}} \circ \langle \{0, I_X\} \rangle.$$

Ясно, что при $x^*: n \mapsto -n^{-1}$ и $h: n \mapsto 1$ выполняется

$$(G \circ F)'(x^*)h = 1; \quad F(x^*)h = 0.$$

Причиной этого является, разумеется, анормальность банаховых пределов.

II.3.3. В качестве приложений полученных выше теорем можно получить разнообразные результаты о представлении субдифференциалов составных операторов. Приведем здесь некоторые из них.

I. *Пусть* $F_1, \ldots, F_n: X \to Y \cup \{+\infty\}$ — *выпуклые операторы, причем* $x^* \in U \subset \operatorname{dom}(F_1) \cap \ldots \cap \operatorname{dom}(F_n)$ *и* x^* — *внутренняя точка множества* U. *Тогда*

$$\partial_{x^*}(F_1 + \ldots + F_n) = \partial_{x^*}(F_1) + \ldots + \partial_{x^*}(F_n);$$
$$\partial_{x^*}(F_1 \vee \ldots \vee F_n) = \bigcup_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \Gamma(x^*)} (\alpha_1 \circ \partial_{x^*}(F_1) + \ldots$$
$$\ldots + \alpha_n \circ \partial_{x^*}(F_n)),$$

где объединение берется по следующему множеству:

$$\Gamma(x^*) = \Big\{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n): \alpha_k \geqslant 0, \quad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = I_Y,$$
$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \circ F_k x^* = F_1 x^* \vee \ldots \vee F_n x^*\Big\}.$$

II. *Пусть* K-*пространство* Y *обладает допустимой топологией,* $F: X \to Y \cup \{+\infty\}$ — *выпуклый оператор и* $G: Y \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ — *возрастающая выпуклая функция,* (o)-*непрерывная и непрерывная относительно допустимой топологии в точке* Fx^*. *Пусть, кроме того,* $\operatorname{dom}(G) = Y$ и x^* — *внутренняя точка в* $\operatorname{dom}(F)$. *Тогда*

$$\partial_{x^*}(G \circ F) = \partial_{Fx^*}(G) \circ \partial_{x^*}(F).$$

Переходя, например, к производным по направлениям, убеждаемся в том, что достаточно рассмотреть случай, когда G — сублинейный функционал, а $F = \varepsilon_{\mathfrak{A}}$ для некоторого множества $\mathfrak{A}$, и доказать, что

$$\partial(G \circ \varepsilon_{\mathfrak{A}}) = \partial(G) \circ \partial(\varepsilon_{\mathfrak{A}}).$$

Включение $\partial(G)\circ\partial(\varepsilon_{\mathfrak{A}}) \subset \partial(G\circ\varepsilon_{\mathfrak{A}})$ очевидно. Кроме того, прямым подсчетом проверяется, что

$$P_{\partial(G)\circ\partial(\varepsilon_{\mathfrak{A}})} = P_{\partial(G\circ\varepsilon_{\mathfrak{A}})}.$$

Таким образом, необходимо проверить только, что множество функционалов $\partial(G)\circ\partial(\varepsilon_{\mathfrak{A}})$ является опорным. Для этого, как видно из ранее доказанного, следует проверить слабую замкнутость этого множества.

Итак, пусть $g_\gamma \in \partial(G)$ и $\alpha_\gamma \in \partial(\varepsilon_{\mathfrak{A}})$ для всех γ. В силу допустимости топологий на Y и $\mathbf{R}$ можно считать, что $g_\gamma \longrightarrow g_0$ и $\alpha_\gamma \longrightarrow \alpha_0$ (в соответствующих операторных топологиях), причем $g_0 \in \partial(G)$ и $\alpha_0 \in \partial(\varepsilon_{\mathfrak{A}})$. Таким образом, для всех $y \in (Y^{\mathfrak{A}})_\infty$ выполняется

$$|g_\gamma(\alpha_\gamma y) - g_0(\alpha_0 y)| \leqslant$$
$$\leqslant |g_\gamma(\alpha_\gamma y) - g_\gamma(\alpha_0 y)| + |g_\gamma(\alpha_\gamma y) - g_0(\alpha_0 y)| \leqslant$$
$$\leqslant G(\alpha_\gamma y - \alpha_0 y) \vee G(\alpha_0 y - \alpha_\gamma y) + |g_\gamma(\alpha_0 y) - g_0(\alpha_0 y)| \longrightarrow 0$$

в силу непрерывности оператора G. Таким образом,

$$g_\gamma\circ\alpha_\gamma \longmapsto g_0\circ\alpha_0$$

и, следовательно,

$$\partial(G\circ\varepsilon_{\mathfrak{A}}) = \mathrm{cop}\,(\partial(G)\circ\partial(\varepsilon_{\mathfrak{A}})) = \partial(G)\circ\partial(\varepsilon_{\mathfrak{A}}),$$

что и требовалось доказать.

III. *Пусть Y, Z — некоторые K-пространства. Для любого множества $\mathfrak{A}$ и оператора $A \in L^+((Y^{\mathfrak{A}})_\infty, Z)$ совместна система условий*

$$\alpha \in \partial(\varepsilon_{\mathfrak{A},Z});$$
$$A = \alpha\circ\langle A\circ\Delta_{\mathfrak{A},Y}\circ\partial(\varepsilon_{\mathfrak{A},Y})\rangle.$$

Действительно, пусть $B = A\circ\Delta_{\mathfrak{A},Y}$. Тогда $B \in L^+(Y, Z)$ и по предложению I пункта **2.2** выполняется

$$\partial(B\circ\varepsilon_{\mathfrak{A},Y}) = \{C \in L^+((Y^{\mathfrak{A}})_\infty, Z) : C\circ\Delta_{\mathfrak{A},Y} = B\}.$$

Кроме того, привлекая предложение II пункта 1.5, прямым вычислением получаем представление

$$\partial\left(B\circ\varepsilon_{\mathfrak{A},Y}\right)=\operatorname{cop}\left(B\circ\partial\left(\varepsilon_{\mathfrak{A},Y}\right)\right),$$

что и требовалось.

IV. *Пусть* $F:X\to Y\cup\{+\infty\}$ — *выпуклый оператор,* $G:Y\to Z\cup\{+\infty\}$ — *возрастающий выпуклый оператор. Пусть, далее, точка* x^* — *внутренняя в* $\operatorname{dom}(F)$, *а* Fx^* — *внутренняя точка в* $\operatorname{dom}(G)$. *Тогда справедливы представления:*

$$\partial_{x^*}(G\circ F_\varepsilon)=\{\alpha\circ\langle A\circ\partial_{x^*}(F)\rangle:\alpha\in\partial\left(\varepsilon_{\partial_{x^*}(F),Z}\right),$$
$$A\in\partial_{Fx^*}(G)\};$$
$$\partial_{x^*}(G\circ F_\varepsilon)=\{\alpha\circ\langle\partial_{Fx^*}(G)\circ\partial_{x^*}(F)\rangle:\alpha\in$$
$$\in\partial\left(\varepsilon_{\partial_{Fx^*}(G)\circ\partial_{x^*}(F),Z}\right)\}.$$

Оба эти представления являются непосредственными следствиями теоремы 5 и предложения III.

II.3.4. Займемся теперь изучением субдифференциалов суперпозиций в произвольной (не обязательно внутренней) точке эффективного множества. Теория не всюду определенных сублинейных операторов разработана еще далеко не в достаточной степени, поэтому столь завершенные на качественном уровне результаты, как те, что мы получили выше, здесь пока отсутствуют. В то же время ситуация далеко не безнадежная. В частности, мы покажем, что наиболее употребительные в приложениях формулы для вычисления субдифференциалов сохраняются при необременительных предположениях и для не всюду определенных сублинейных операторов. Полезно иметь в виду, что излагаемый ниже подход, основанный на применении обобщенной теоремы Мазура — Орлича, дает новые доказательства некоторых из приведенных в предыдущих пунктах утверждений.

Теорема Мазура — Орлича. *Пусть* $P:X\to Y\cup\{+\infty\}$ — *сублинейный оператор,* $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ *и* $(y_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — *семейства элементов в векторном пространстве* X *и в* K-*пространстве* Y *соответственно.*

Если наименьший конус в X, *содержащий элементы* $(-x_\xi)$, $\xi\in\Xi$ *и эффективное множество* $\operatorname{dom}(P)$, *являет-*

ся подпространством, то равносильны следующие утверждения:

(1) *Существует оператор* $A \in L(X, Y)$ *такой, что*

$$A \in \partial(P); \quad Ax_\xi \geqslant y_\xi \quad (\xi \in \Xi).$$

(2) *Для любых чисел* $\lambda_1 \ldots, \lambda_n \in \mathbf{R}^+$ *и* $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \Xi$ *таких, что* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_{\xi_i} \in \operatorname{dom}(P)$, *выполняется*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_{\xi_i} \leqslant P\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_{\xi_i}\right).$$

Доказательство. Следует проверить только импликацию (2) $\Rightarrow$ (1). Проверка этого соотношения вполне аналогична схеме доказательства леммы Мазура — Орлича, поэтому здесь мы ограничимся изложением основной канвы рассуждений.

Пусть $X_1 = (\mathbf{R}^{\Xi})^r$ — прямая сумма соответствующего числа прямых. Определим операторы B, C следующими соотношениями:

$$Bz = \sum_{\gamma \in \Xi} z(\xi) x_\xi; \quad B \in L(X_1, X);$$

$$Cz = \sum_{\xi \in \Xi} z(\xi) y_\xi; \quad C \in L(X_1, Y).$$

Здесь элемент $z \in X_1$ рассматривается как функция $z: \Xi \longrightarrow \mathbf{R}$, отличная от нуля лишь в конечном числе точек множества Ξ.

Обозначим через X_0 наименьший конус, содержащий эффективное множество $\operatorname{dom}(P)$ и семейство $(-x_\xi)\, \xi \in \Xi$. Тогда в силу определений X_0 — линейное подпространство X, причем

$$X_0 = B[X_1^+] - \operatorname{dom}(P) = \operatorname{dom}(P) - B[X_1^+]$$

и, кроме того,

$$P(Bh) \geqslant Ch \quad (h \in X_1^+ \cap B^{-1}[\operatorname{dom}(P)]).$$

Таким образом, для всякого $x_0 \in X_0$ найдутся элементы $z_1, z_2 \in X_1^+$, для которых

$$x_0+Bz_1\in\mathrm{dom}(P);$$
$$-x_0+Bz_2\in\mathrm{dom}(P);$$
$$P(Bz_1+Bz_2)\geqslant C(z_1+z_2).$$

Следовательно, справедливы оценки

$$P(x_0+Bz_1)-Cz_1\geqslant -P(-x_0+Bz_2)+P(Bz_1+$$
$$+Bz_2)-Cz_1\geqslant$$
$$\geqslant C(z_1+z_2)-Cz_1-P(-x_0+Bz_2)=-P(-x_0+$$
$$+Bz_2)+Cz_2.$$

Иными словами, для всякого $x_0\in X_0$ определен элемент

$$P_1x_0=\inf\{P(x_0+Bz_1)-Cz_1: z_1\in X_1^+,$$
$$x_0+Bz_1\in\mathrm{dom}(P)\}.$$

Предоставляем читателю убедиться в том, что возникающий оператор $P_1: X_0\to Y\cup\{+\infty\}$ является сублинейным, причем $\mathrm{dom}(P_1)=X_0$. Воспользовавшись теперь теоремой Хана — Банаха — Каторовича, выберем любой элемент опорного множества оператора P_1 и распространим его каким-либо способом до линейного оператора, определенного на X (например, доопределяя этот оператор нулем на алгебраическом дополнении X_0). Рутинный подсчет показывает, что построенный оператор удовлетворяет требуемым соотношениям. Теорема доказана.

II.3.5. Теорема Мазура — Орлича доставляет удобный аппарат вычисления субдифференциалов. Прежде всего, мы применим ее для описания опорных множеств некоторых сублинейных операторов, определенных на конусе.

Нам потребуются следующие определения.

Конусы (не обязательно различные) H_1 и H_2 в векторном пространстве X *находятся в общем положении*[2], если выполняется $H_1-H_2=H_2-H_1$; иными словами, если наименьший конус, содержащий H_1 и $-H_2$, является подпространством в X.

---

[2] Точнее было бы говорить, что в общем положении находятся конусы H_1 и $-H_2$.

Конусы $H_1, \ldots, H_n$ в векторном пространстве X *находятся в общем положении*, если для некоторой перестановки $\{i_1, \ldots, i_n\}$ множества индексов $\{1, \ldots, n\}$ конусы H_{i_k} и $\bigcap_{s=k+1}^{n} H_{i_s}$ находятся в общем положении для всех $k=1, \ldots, n-1$.

Укажем некоторые наиболее часто встречающиеся случаи общего положения системы конусов.

I. *Если $H_1, \ldots, H_n$ — подпространства в X, то $H_1 \ldots \ldots, H_n$ находятся в общем положении.*

II. *Если конусы $H_1, \ldots, H_n$ совпадают, то они находятся в общем положении.*

III. *Если конус $H_1 \cap \ldots \cap H_n$ содержит внутреннюю точку каждого, за исключением, быть может, одного из конусов $H_1, \ldots, H_n$, то эти конусы находятся в общем положении.*

Нуждается в проверке лишь предложение III. При этом, как видно, следует установить только, что если конусы H_1 и H_2 таковы, что $H_1 \cap H_2$ содержит внутреннюю точку x^* одного из них — для определенности H_2, то H_1 и H_2 находятся в общем положении. Последнее непосредственно следует из того, что конус H_2-H_1 в силу условий является поглощающим множеством, ибо $H_2-H_1 \supset H_2-x^*$. Следовательно, этот конус совпадает с пространством X.

Перейдем теперь к вычислению субдифференциалов.

IV. *Пусть $P_1, \ldots, P_n : X \to Y \cup \{+\infty\}$ — сублинейные операторы, причем эффективные множества* $\operatorname{dom}(P_1), \ldots, \operatorname{dom}(P_n)$ *находятся в общем положении. Тогда справедливо представление*[3].

$$\partial(P_1+\ldots+P_n)=\partial(P_1)+\ldots+\partial(P_n).$$

Достаточно, очевидно, рассмотреть случай $n=2$ и установить, что $\partial(P_1+P_2) \subset \partial(P_1)+\partial(P_2)$.

Если $A \in \partial(P_1+P_2)$, то выполняется $Ax \leqslant P_1x+P_2x$ для всех $x \in \operatorname{dom}(P_1) \cap \operatorname{dom}(P_2)$.

Проверим, что существует оператор $A_1 \in L(X, Y)$, для которого

$$A_1 \in \partial(P_1);$$

$$A_1x \geqslant -P_2x+Ax \quad (x \in \operatorname{dom}(P_2)).$$

---

[3] Как обычно, считается, что $A+\varnothing=\varnothing$ для любого множества A.

Поскольку коническая оболочка множества $\operatorname{dom}(P_1) \cup \cup (-\operatorname{dom}(P_2))$ совпадает с $\operatorname{dom}(P_1) - \operatorname{dom}(P_2)$ и, следовательно, является подпространством, то можно применить теорему Мазура — Орлича.

Если $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in \operatorname{dom}(P_1)$, где $\lambda_1 \geqslant 0, \ldots, \lambda_n \geqslant 0$ и элементы $x_1, \ldots, x_n$ входят в $\operatorname{dom}(P_2)$, то выполняется $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in \operatorname{dom}(P_1) \cap \operatorname{dom}(P_2)$ и, значит, справедлива

$$P_1\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \geqslant -P_2\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) + \\ + A\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \geqslant -\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (P_2 x_i - A x_i),$$

совпадающая с оценкой, фигурирующей в пункте (2) теоремы Мазура — Орлича.

Таким образом, требуемый оператор A_1 существует. Осталось заметить, что $A - A_1 \in \partial(P_2)$. Тем самым предложение доказано.

V. *Пусть* $P_1 : X \to Y \cup \{+\infty\}$ — *сублинейный оператор, действующий в упорядоченное пространство* Y. *Пусть далее* Z — *некоторое* K-*пространство и* $P_2 : Y \to \to Z \cup \{+\infty\}$ — *возрастающий сублинейный оператор. Если конус* $\operatorname{dom}(P_2)$ *и коническая оболочка множества* $P_1[\operatorname{dom}(P_1)]$ *находятся в общем положении, то*

$$\partial(P_2 \circ P_1) = \bigcup_{A \in \partial(P_2)} \partial(A \circ P_1).$$

Если $C \in \partial(P_2 \circ P_1)$, то для всех $x \in \operatorname{dom}(P_1)$ выполняется $Cx \leqslant P_2 \circ P_1 x$. Следует проверить, что найдется оператор $A \in \partial(P_2)$ такой, что $Cx \leqslant A \circ P_1 x$ для всех $x \in \in \operatorname{dom}(P_1)$. Для положительных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ и элементов $x_1, \ldots, x_n$ из $\operatorname{dom}(P_1)$ таких, что $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_1 x_i \in \in \operatorname{dom}(P_2)$ выполнены оценки

$$P_2\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_1 x_i\right) \geqslant P_2 \circ P_1\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \geqslant \\ \geqslant C\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i C x_i.$$

Таким образом, выполнены условия теоремы Мазура — Орлича и, стало быть,

$$\partial(P_2 \circ P_1) \subset \bigcup_{A \in \partial(P_2)} \partial(A \circ P_1).$$

Обратное включение очевидно.

Замечание 1. В частности, если Y является K-пространством, то для любого проектора $\Pr$ в нем выполняется

$$\partial(P_2 \circ P_1) = \bigcup_{A \in \partial(P_2)} \left(\partial(A \circ \Pr \circ P_1) + \partial\left(A \circ \Pr^d \circ P_1\right)\right).$$

VI. *Пусть* $P_1, \ldots, P_n : X \to Y \cup \{+\infty\}$ — *сублинейные операторы, причем их эффективные множества* $\operatorname{dom}(P_1), \ldots, \operatorname{dom}(P_n)$ *находятся в общем положении. Тогда справедливо представление*

$$\partial(P_1 \vee \ldots \vee P_n) = \bigcup_{\substack{\alpha_1 \geqslant 0, \ldots, \alpha_n \geqslant 0 \\ \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = I_Y}} (\partial(\alpha_1 \circ P_1) + \ldots$$
$$\ldots + \partial(\alpha_n \circ P_n)).$$

Теорема 6 (3.II). *Пусть* Y — *некоторое* K-*пространство*, $F_1, \ldots, F_n : X \to Y \cup \{+\infty\}$ — *выпуклые операторы, причем конусы допустимых направлений* $\operatorname{Fd}_{x^*}(\operatorname{dom}(F_1)), \ldots, \operatorname{Fd}_{x^*}(\operatorname{dom}(F_n))$ *находятся в общем положении. Тогда справедливо представление*

$$\partial_{x^*}(F_1 + \ldots + F_n) = \partial_{x^*}(F_1) + \ldots + \partial_{x^*}(F_n).$$

Доказательство. Нужно проверить только, что если выполняется $\partial_{x^*}(F_1 + \ldots + F_n) \neq \varnothing$, то $\partial_{x^*}(F_k) \neq \varnothing$ для всех $k = 1, \ldots, n$. Иными словами, надо показать, что в этом случае каждый из операторов $F_1, \ldots, F_n$ дифференцируем по направлениям из соответствующего конуса допустимых направлений. Действительно, тогда (ср. предложение IV в **3.1**) выполняется

$$(F_1 + \ldots + F_n)'(x^*) = F_1'(x^*) + \ldots + F_n'(x^*)$$

и остается воспользоваться предложением IV.

Достаточно рассмотреть случай $n = 2$. При этом, не нарушая общности, можно считать, что $x^* = 0$ и $F_1 x^* =$

$=F_2x^*=\mathbf{0}$, так как в противном случае можно рассмотреть операторы

$$G_1 : x \longrightarrow F_1(x^*+x)-F_1x^*;$$
$$G_2 : x \longrightarrow F_2(x^*+x)-F_2x^*,$$

для которых, очевидно, справедливы соотношения

$$G_1\mathbf{0}=G_2\mathbf{0}=\mathbf{0};$$
$$\partial_0(G_1)=\partial_{x^*}(F_1);\ \partial_0(G_2)=\partial_{x^*}(F_2);$$
$$\partial_0(G_1+G_2)=\partial_{x^*}(F_1+F_2).$$

Пусть $h\in \mathrm{Fd}_{x^*}(\mathrm{dom}(F_1))$. По условию найдутся элементы $h_1\in \mathrm{Fd}_{x^*}(\mathrm{dom}(F_1))$ и $h_2\in \mathrm{Fd}_{x^*}(\mathrm{dom}(F_2))$ такие, что $h_2=h+h_1$. Можно считать, что $3h$, $3h_1\in\mathrm{dom}(F_1)$ и $h_2\in\mathrm{dom}(F_2)$. Тогда при достаточно малых положительных α имеют место оценки (ср. **3.1**)

$$F_1(\alpha h_1)\leqslant\alpha F_1h_1;$$
$$F_2(\alpha h_2)\leqslant\alpha F_2h_2;$$
$$F_1(\alpha h_2)\geqslant A(\alpha h_2)-F_2(\alpha h_2)$$

для любого оператора A из $\partial_{x^*}(F_1+F_2)$. Кроме того, в силу выпуклости F_1 и сделанных упрощающих предположений выполняется

$$F_1(\alpha h_2)=F_1(3\alpha h/3+3\alpha h_1/3+\mathbf{0}/3)\leqslant$$
$$\leqslant F_1(3\alpha h)/3+F_1(3\alpha h_1)/3\leqslant F_1(3\alpha h)/3+\alpha F_1h_1.$$

Окончательно получаем

$$F_1(3\alpha h)/3\geqslant\alpha(Ah_2-F_2h_2-F_1h_1).$$

Таким образом, функция $\alpha\longrightarrow F_1(\alpha h)/\alpha$, определенная при достаточно малых α, ограничена снизу, что и означает дифференцируемость оператора F_1 в нуле в направлении h. По аналогичным причинам оператор F_2 дифференцируем по направлениям из конуса $\mathrm{Fd}_{x^*}(\mathrm{dom}(F_2))$. Теорема доказана.

Замечание 2. На самом деле метод, изложенный в доказательстве теоремы 6, дает большее. Именно, справедливо следующее следствие теоремы Мазура — Орлича.

VII. *Пусть* Y — *некоторое* K-*пространство и задан выпуклый оператор* $F: X \to Y \cup \{+\infty\}$ *и семейства* $(x_\xi)_{\xi \in \Xi}$, $(y_\xi)_{\xi \in \Xi}$, *где* $x_\xi \in X$ *и* $y_\xi \in Y$ *для всех* $\xi \in \Xi$.

Если коническая оболочка семейства $(x_\xi)_{\xi \in \Xi}$ *и конус допустимых направлений* $\mathrm{Fd}_{x^*}(\mathrm{dom}(F))$ *находятся в общем положении, то равносильны следующие утверждения:*

(1) *Существует оператор* $A \in L(X, Y)$ *такой, что*

$$A \in \partial_{x^*}(F);$$

$$Ax_\xi \geqslant y_\xi \quad (\xi \in \Xi).$$

(2) *Для любых* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geqslant 0$ *и* $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \Xi$ *таких, что* $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i < 1$ *и* $x^* + \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_{\xi_i} \in \mathrm{dom}(F)$, *выполняется*

$$F\left(x^* + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_{\xi_i}\right) - Fx^* \geqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_{\xi_i}.$$

Эта модификация теоремы Мазура — Орлича также часто используется в приложениях. Все же, как правило, в конкретных ситуациях проще прямым переходом к производным по допустимым направлениям сводить дело к случаю сублинейных операторов.

В качестве представляющего самостоятельный интерес примера установим *предложение о возможности разделения операторов*, которое понадобится нам в дальнейшем.

VIII. *Пусть* $F, G: X \to Y \cup \{+\infty\}$ — *выпуклые операторы, причем* $\mathrm{dom}(F) = \mathrm{dom}(G)$. *Если* $F + G \geqslant \mathbf{0}$, *то найдутся оператор* $A \in L(X, Y)$ *и элемент* $y \in Y$ *такие, что выполняются оценки*

$$F - A_y \geqslant \mathbf{0}, \ A_y + G \geqslant \mathbf{0}.$$

Не нарушая общности, будем считать, что $\mathbf{0} \in \mathrm{dom}(F)$. Рассмотрим элементы $x_1, x_2 \in \mathrm{dom}(F)$ и числа α_1, α_2 такие, что $0 \leqslant \alpha_1 < 1 < \alpha_2$ и, кроме того, $\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2 \in \mathrm{dom}(F)$. Непосредственно проверяется справедливость оценки

$$\frac{F(\alpha_1 x_1) + \alpha_1 G x_1}{1 - \alpha_1} + \frac{\alpha_2 G x_2 + F(\alpha_2 x_2)}{\alpha_2 - 1} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\alpha_2-\alpha_1}{(1-\alpha_1)(\alpha_2-1)}\left(F\left(\frac{(\alpha_2-1)\,\alpha_1x_1+(1-\alpha_1)\,\alpha_2x_2}{\alpha_2-\alpha_1}\right)+\right.$$
$$\left.+\,G\left(\frac{(\alpha_2-1)\,\alpha_1x_1+(1-\alpha_1)\,\alpha_2x_2}{\alpha_2-\alpha_1}\right)\right)\geqslant 0.$$

Отсюда, в частности, следует, что существует элемент $y\in Y$, для которого

$$F(\alpha x)-y\geqslant-\alpha(Gx+y)$$

для всех $x\in\mathrm{dom}(F)$ и $\alpha\geqslant 0$ таких, что $\alpha x\in\mathrm{dom}(F)$. При этом $F0\geqslant y$.

Для элемента $h\in\mathrm{Fd}_0(\mathrm{dom}(F))$ положим

$$Ph=\inf\{\alpha^{-1}(F(\alpha h)-y):\ \alpha>0,\ \alpha h\in\mathrm{dom}(F)\}.$$

Очевидно, что тем самым корректно определен сублинейный оператор $P: X\to Y\cup\{+\infty\}$, причем $\mathrm{dom}(P)=Fd_0(\mathrm{dom}(F))$ (в частности, соотношение $P0=0$ следует из оценки $F0\geqslant y$).

Если теперь $\sum_{i=1}^{n}\lambda_ix_i\in\mathrm{dom}(F)$ для некоторых $\lambda_1,\ldots,\lambda_n\geqslant 0$ и $x_1,\ldots,x_n\in\mathrm{dom}(F)$, то обозначив $\lambda_0=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$ и считая, что $\lambda_0>0$, имеем

$$P\left(\frac{1}{\lambda_0}\sum_{i=1}^{n}\lambda_ix_i\right)\geqslant -G\left(\frac{1}{\lambda_0}\sum_{i=1}^{n}\lambda_ix_i\right)-$$
$$-y\geqslant-\frac{1}{\lambda_0}\sum_{i=1}^{n}\lambda_iGx_i-y,$$

так что справедливо неравенство

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_ix_i\right)\geqslant-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(Gx_i+y).$$

Осталось применить теорему Мазура — Орлича и найти оператор $A\in\partial(P)$ такой, что $Ax\geqslant-Gx-y$ для всех $x\in\mathrm{dom}(F)$. Ясно, что оператор A — искомый.

Установим теперь основной результат этого пункта.

Теорема 7 (3.II). *Пусть X — векторное пространство, Y — упорядоченное векторное пространство и Z — некоторое K-пространство. Пусть далее, $F: X \to Y \cup \{+\infty\}$ — выпуклый оператор, $G: Y \to Z \cup \{+\infty\}$ — возрастающий выпуклый оператор, причем* $\mathrm{dom}(G) \supset F[\mathrm{dom}(F)]$ *и для некоторой точки* $x^* \in \mathrm{dom}(F)$ *точка Fx^* является внутренней в множестве* $\mathrm{dom}(G)$. *Тогда справедливо представление*

$$\partial_{x^*}(G \circ F) = \bigcup_{A \in \partial_{Fx^*}(G)} \partial_{x^*}(A \circ F).$$

Доказательство. Если $C \in \partial_{x^*}(A \circ F)$ для некоторого оператора A из $\partial_{Fx^*}(G)$, то

$$Cx - Cx^* \leqslant A \circ Fx - A \circ Fx^* \leqslant G(Fx) - G(Fx^*),$$

так что $C \in \partial_{x^*}(G \circ F)$.

Допустим теперь, что $C \in \partial_{x^*}(G \circ F)$. Заметим, прежде всего, что для любого элемента $x \in \mathrm{dom}(F)$ справедлива оценка

$$Cx - Cx^* \leqslant G'(Fx^*)(Fx - Fx^*).$$

Действительно, для всех чисел α таких, что $0 < \alpha < 1$, по определению выполняется

$$\alpha C(x - x^*) = C(\alpha x + (1-\alpha)x^*) - Cx^* \leqslant$$

$$\leqslant G(F(\alpha x + (1 - \alpha x^*))) - G(Fx^*) \leqslant G(\alpha Fx +$$

$$+ (1-\alpha)Fx^*) - G(Fx^*) = G(Fx^* + \alpha(Fx - Fx^*)) -$$

$$- G(Fx^*) = \alpha G'(Fx^*)(Fx - Fx^*) + \alpha w(\alpha),$$

где $w(\alpha) \downarrow 0$ при $\alpha \downarrow 0$.

Нас интересует вопрос о существовании оператора $A \in \partial_{Fx^*}(G)$ такого, что

$$Cx - Cx^* \leqslant A(Fx - Fx^*) \quad (x \in \mathrm{dom}(F)).$$

Воспользуемся установленной оценкой, чтобы убедиться в том, что для любых чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geqslant 0$ и элементов $x_1, \ldots, x_n$ из эффективного множества $\mathrm{dom}(F)$ выполняется

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (Cx_i - Cx^*) \leqslant G'(Fx^*)\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (Fx_i - Fx^*)\right).$$

Действительно, не нарушая общности, будем считать, что число $\lambda_0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ строго положительно. Тогда элемент

$$x_0 = \frac{1}{\lambda_0} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

входит в $\mathrm{dom}(F)$ и, значит,

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (Cx_i - Cx^*) = \lambda_0 (Cx_0 - Cx^*) \leqslant$$
$$\leqslant \lambda_0 G(Fx^*)(Fx_0 - Fx^*) = G'(Fx^*)(\lambda_0 (Fx_0 - Fx^*)) \leqslant$$
$$\leqslant G'(Fx^*)\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i Fx_i - \lambda_0 Fx^*\right) =$$
$$= G'(Fx^*)\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (Fx_i - Fx^*)\right).$$

Следовательно, существование требуемого оператора A обеспечивается теоремой Мазура — Орлича. Таким образом, $C \in \partial_{x^*}(A \circ F)$, что и завершает доказательство.

Следствие 1. *Если Y является K-пространством, то для любого проектора* Pr *в Y справедливо представление*

$$\partial_{x^*}(G \circ F) = \bigcup_{A \in \partial_{Fx^*}(G)} \left(\partial_{x^*}(A \circ \mathrm{Pr} \circ F) + \partial_{x^*}(A \circ \mathrm{Pr}^d \circ F)\right).$$

В силу теоремы 7 выполняется

$$\partial_{x^*}(G \circ F) = \bigcup_{A \in \partial_{Fx^*}(G)} \partial_{x^*}\left(A \circ \mathrm{Pr} \circ F + A \circ \mathrm{Pr}^d \circ F\right).$$

Осталось воспользоваться теоремой 6.

Следствие 2. *Пусть Y является K-пространством, а $F_1, \ldots$ $\ldots, F_n : X \to Y \cup \{+\infty\}$ — выпуклые операторы, причем ко-*

нусы допустимых направлений $\mathrm{Fd}_{x^*}(\mathrm{dom}\,(F_1)),\ \ldots,$ $\mathrm{Fd}_{x^*}(\mathrm{dom}(F_n))$ *находятся в общем положении. Тогда*

$$\partial_{x^*}(F_1 \vee \ldots \vee F_n) = \bigcup_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\Gamma(x^*)} (\partial_{x^*}(\alpha_1 \circ F_1) + \ldots$$
$$\ldots + \partial_{x^*}(\alpha_n \circ F_n)),$$

где объединение берется по следующему множеству:

$$\Gamma(x^*) = \Big\{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) : \alpha_k \geqslant 0,\quad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = I_Y;$$
$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \circ F_k x^* = F_1 x^* \vee \ldots \vee F_n x^*\Big\}.$$

Этот факт мы получим на основе более общего утверждения.

Следствие 3. *Пусть Y — векторная решетка, а Z — некоторое K-пространство и $A \in L^+(Y, Z)$. Пусть далее заданы выпуклые операторы $F_1, \ldots, F_n : X \to Y \cup \{+\infty\}$, причем конусы допустимых направлений* $\mathrm{Fd}_{x^*}(\mathrm{dom}\,(F_1)), \ldots, \mathrm{Fd}_{x^*}(\mathrm{dom}\,(F_n))$ *находятся в общем положении. Тогда*

$$\partial_{x^*}(A \circ (F_1 \vee \ldots \vee F_n)) = \Big\{\sum_{k=1}^{n} \partial_{x^*}(A_k \circ F_k) : A_k \geqslant 0,$$
$$\sum_{k=1}^{n} A_k = A,\quad \sum_{k=1}^{n} A_k \circ F_k x^* = A(F_1 x^* \vee \ldots \vee F_n x^*)\Big\}.$$

Рассмотрим выпуклые операторы

$$\varepsilon : Y^n \longrightarrow Y;\quad \varepsilon(y_1, \ldots, y_n) = y_1 \vee \ldots \vee y_n;$$
$$(F_1, \ldots, F_n) : X \longrightarrow Y^n;\quad (F_1, \ldots, F_n)\,x = (F_1 x, \ldots, F_n x).$$

Тогда, очевидно, имеет место следующее представление:

$$A \circ (F_1 \vee \ldots \vee F_n) = A \circ \varepsilon \circ (F_1, \ldots, F_n).$$

Таким образом, в силу теоремы 7 выполняется

$$\partial_{x^*}(A \circ (F_1 \vee \ldots \vee F_n)) =$$
$$= \bigcup_{B \in \partial_{(F_1 x^*, \ldots, F_n x^*)}(A \circ \varepsilon)} \partial_{x^*}(B \circ (F_1, \ldots, F_n)).$$

Поскольку в силу предложения I пункта 2.2

$$\partial(A \circ \varepsilon) = \left\{(y_1, \ldots, y_n) \to \sum_{k=1}^{n} A_k y_k : A_k \in \right.$$
$$\left. \in L^+(Y, Z),\ \sum_{k=1}^{n} A_k = A\right\},$$

то, привлекая предложение II пункта 1.5 и теорему 6, получаем требуемое.

II.3.6. В этом пункте мы применим полученные результаты к исследованию преобразований Юнга.

Пусть Y — некоторое K-пространство. Присоединим к Y помимо наибольшего элемента $+\infty$ наименьший элемент $-\infty$. Полученное множество будем обозначать $Y \cup \{\infty\}$. Если теперь задано отображение: $F: X \to Y \cup \{\infty\}$, определенное на векторном пространстве X, то для оператора $A \in L(X, Y)$ положим

$$F^*A = \sup_{x \in X} (Ax - Fx).$$

Оператор F^* называется *преобразованием Юнга* оператора F. Если условиться считать, что оператор $-\infty$: $: x \longrightarrow -\infty$ по определению выпуклый, то можно утверждать, что F^* — выпуклый оператор для любого оператора F.

Введенная конструкция с каждым оператором $G: L(X, Y) \to Y \cup \{\infty\}$ и линейным оператором $B \in L(L(X, Y), Y)$ связывает элемент

$$G^*B = \sup_{A \in L(X,Y)} (B \circ A - GA).$$

Пространство X можно считать вложенным в $L(L(X, Y), Y)$ с помощью сопоставления элементу $x \in X$ отображения вычисления: $A \longrightarrow Ax$ для $A \in L(X, Y)$. Поэтому след оператора G^* на пространство X определен и является выпуклым. Этот оператор также обозначается символом G^*.

Таким образом, с оператором $F: X \to Y \cup \{\infty\}$ естественно связано *второе преобразование Юнга* F^{**}. Именно,

$$F^{**}x = \sup_{A \in L(X,Y)} (Ax - F^*A).$$

Напомним, что операторы вида A_y, где $A \in L(X, Y)$ и $y \in Y$, называются *аффинными* на X. В преобразованиях Юнга, как видно, участвуют именно такие операторы. В этой связи неудивителен следующий факт.

I. *Равенство $F^{**} = F$ имеет место в том и только в том случае, если оператор F представляет собой т. в. г. некоторого семейства аффинных операторов.*

Следует установить только, что если $F = \sup U$, где U — некоторое множество аффинных операторов, то $F^{**} = F$.

Если $B \in U$, то для каждого $x \in X$ выполняется $Bx = A_y x = Ax + y$ для некоторых $A \in L(X, Y)$ и $y \in Y$. При этом $Fx \geqslant Ax + y$ и потому

$$F^* A = \sup_{x \in X} (Ax - Fx) \leqslant -y.$$

Отсюда следует, что справедлива оценка

$$F^{**} x \geqslant Ax - F^* A \geqslant Ax + y = Bx.$$

Таким образом, $F^{**} \geqslant F$. Обратное неравенство очевидно.

Приведенное предложение, известное под названием *теоремы Фенхеля — Моро,* объясняет роль преобразований Юнга в теории выпуклых операторов. Именно, для выпуклого оператора F элементы эффективного множества $\operatorname{dom}(F^*)$ можно трактовать, как аналоги субградиентов. Действительно, в тех точках $x^* \in \operatorname{dom}(F)$, в которых исходный оператор субдифференцируем, т. е. $\partial_{x^*}(F) \neq \varnothing$, выполняется равенство $F^{**} x^* = F x^*$, ибо $F^* A = A x^* - F x^*$, как только $A \in \partial_{x^*}(F)$. В связи с этим очевидна важность нахождения правил для вычисления преобразований Юнга. Мы приведем здесь только некоторые наиболее важные и нетривиальные формулы.

II. *Пусть X — векторное пространство, Y — упорядоченное векторное пространство, $F: X \to Y \cup \{+\infty\}$ — выпуклый оператор и $P: Y \longrightarrow Z$, где Z — некоторое K-пространство, — возрастающий сублинейный оператор. Тогда*

$$(P \circ F)^* = \inf_{B \in \partial(P)} (B \circ F)^*.$$

Для элемента $(x, t) \in X \times \mathbf{R}$ положим

$$H_F(x, t) = \begin{cases} tF\left(\frac{x}{t}\right); & t > 0,\ x/t \in \mathrm{dom}(F) \\ 0; & t = 0,\ x = 0 \\ +\infty; & \text{другие случаи} \end{cases}.$$

Таким образом, возникает сублинейный оператор H_F, действующий из $X \times \mathbf{R}$ в $Y \cup \{+\infty\}$, причем

$$\mathrm{dom}(H_F) = \{(x, t) \in X \times \mathbf{R}^+ : x \in t\,\mathrm{dom}(F)\}.$$

Если $A \in \mathrm{dom}((P \circ F)^*)$, то для всех (x, t) выполняется

$$Ax - t(P \circ F)^* A \leqslant P \circ H_F(x, t).$$

Таким образом, по предложению V из **3.5** справедливо

$$Ax - t(P \circ F)^* A \leqslant B \circ H_F(x, t)$$

для некоторого $B \in \partial(P)$. Так что имеет место неравенство

$$(B \circ P)^* A \leqslant (P \circ F)^* A.$$

Обратное неравенство очевидно.

Замечание 1. Попутно установлено, что выведенное правило является *точным*, т. е. для любого оператора A в приведенной формуле т. н. г. достигается на некотором операторе B. Иными словами, для эффективных множеств имеем

$$\mathrm{dom}((P \circ F)^*) = \bigcup_{B \in \partial(P)} \mathrm{dom}((B \circ F)^*).$$

Замечание 2. Сублинейный оператор $H_F : X \times \boldsymbol{R} \to Y \cup \{+\infty\}$, введенный при доказательстве предложения II, называется *преобразованием Хермандера* оператора F. Роль этого преобразования, как видно, состоит в том, что аффинные операторы, мажорируемые F, отождествляются с линейными операторами, опорными к преобразованию Хермандера оператора F.

Замечание. 3. Предложение II является теоремой минимаксного типа. Действительно,

$$-(P \circ F)^* 0 = \inf_{x \in \mathrm{dom}(F)} \sup_{B \in \partial(P)} B \circ Fx;$$

$$(B\circ F)^*\,0 = -\inf_{x\in \operatorname{dom}(F)} B\circ Fx.$$

Таким образом, имеет место равенство

$$\sup_{B\in\partial(P)}\ \inf_{x\in\operatorname{dom}(F)} B\circ Fx = \inf_{x\in\operatorname{dom}(F)}\ \sup_{B\in\partial(P)} B\circ Fx,$$

которое, разумеется, содержит в себе предложение IV пункта **2.5**.

III. *Пусть* $F_1, \ldots, F_n: X\to Y\cup\{+\infty\}$ — *выпуклые операторы, причем Y является K-пространством и эффективные множества преобразований Хермандера* $\operatorname{dom}(H_{F_1}), \ldots, \operatorname{dom}(H_{F_n})$ *находятся в общем положении. Тогда*

$$(F_1+\ldots+F_n)^* = F_1^*\oplus\ldots\oplus F_n^*,$$

где $\oplus$ — *операция* inf-*конволюции, т. е.*

$$F_1^*\oplus\ldots\oplus F_n^*A = \inf\left\{\sum_{k=1}^{n} F_k^*A_k : A_k\in L(X,Y),\ \sum_{k=1}^{n} A_k = A\right\}.$$

Для доказательства достаточно заметить, что для преобразований Хермандера выполняется

$$H_{F_1+\ldots+F_n} = H_{F_1}+\ldots+H_{F_n},$$

и воспользоваться предложением IV из **3.5**.

В качестве следствий предложений II и III получается следующее утверждение.

IV. *Пусть* $F_1, \ldots, F_n: X\to Y\cup\{+\infty\}$ — *выпуклые операторы, причем Y является векторной решеткой и эффективные множества преобразований Хермандера* $\operatorname{dom}(H_{F_1}), \ldots, \operatorname{dom}(H_{F_n})$ *находятся в общем положении. Если Z — некоторое K-пространство и* $A\in L^+(Y, Z)$, *то*

$$(A\circ F_1\vee\ldots\vee F_n)^* = \inf\left\{\bigoplus_{k=1}^{n}(A_k\circ F_k)^* : A_k\in L^+(Y,Z);\ \sum_{k=1}^{n} A_k = A\right\}.$$

Положим $(F_1, \ldots, F_n): x \longrightarrow (F_1x, \ldots, F_nx)$, тогда

$$A \circ F_1 \vee \ldots \vee F_n = A \circ \varepsilon \circ (F_1, \ldots, F_n),$$

где ε — соответствующий канонический оператор. Значит, по предложению II выполняется

$$(A \circ F_1 \vee \ldots \vee F_n)^* = \inf \{(B \circ (F_1, \ldots, F_n))^* : B \in \partial (A \circ \varepsilon)\}.$$

Вспоминая правило для вычисления $\partial (A \circ \varepsilon)$ и предложение III, получаем требуемое.

Замечание 4. Формулы, приведенные в предложениях III и IV, также являются точными. Например, предложение IV означает, что для всякого $B \in L(X, Z)$ совместна система условий

$$B_k \in L(X, Z); \; A_k \in L^+(Y, Z);$$

$$A = \sum_{k=1}^{n} A_k; \quad B = \sum_{k=1}^{n} B_k;$$

$$(A \circ F_1 \vee \ldots \vee F_n)^* B = \sum_{k=1}^{n} (A_k \circ F_k)^* B_k.$$

К сожалению, нам не известны общие формулы для субдифференциалов суперпозиции не всюду определенных операторов. В этой связи, в частности, с помощью преобразования Хермандера не удается вычислить преобразование Юнга суперпозиции выпуклых операторов. Однако при наличии внутренних точек в соответствующих эффективных множествах такое вычисление можно провести до конца. При этом, правда, следует воспользоваться иным преобразованием. Такое преобразование вводится следующим предложением.

V. *Пусть* $F: X \to Y \cup \{+\infty\}$ — *выпуклый оператор, действующий в K-пространство* Y, *и для внутренней точки* $x^* \in \mathrm{dom}(F)$ *выполняется* $Fx^* \geqslant \mathbf{0}$. *Тогда для всякого* $h \in X$ *существует*

$$S(F, x^*)h = \inf_{\alpha > 0} \frac{F(x^* + \alpha h)}{\alpha},$$

причем оператор $S(F, x^*): X \longrightarrow Y$ *сублинеен.*

Существование элемента $S(F, x^*)h \in Y$ обеспечивает условие $Fx^* \geqslant 0$ и предложение II из **3.1**. Положительная однородность оператора $S(F, x^*)$ очевидна.

Сублинейность оператора $S(F, x^*)$ вытекает из следующей выкладки:

$$S(F,x^*)h_1 + S(F,x^*)h_2 = \inf_{\alpha>0,\,\beta>0} (\alpha\beta)^{-1}(\beta F(x^* + \alpha h_1) +$$
$$+ \alpha F(x^* + \beta h_2)) = \inf_{\alpha>0,\,\beta>0} (\alpha+\beta)(\alpha\beta)^{-1}((\alpha+\beta)^{-1}\times$$
$$\times \beta F(x^* + \alpha h_1) + (\alpha+\beta)^{-1}\alpha F(x^* + \beta h_2)) \geqslant$$
$$\geqslant \inf_{\alpha>0,\,\beta>0} (\alpha+\beta)(\alpha\beta)^{-1}(F(x^* + (\alpha+\beta)(\alpha\beta)^{-1}\times$$
$$\times (h_1 + h_2))) = S(F, x^*)(h_1 + h_2).$$

VI. *Пусть X_1, X — векторные пространства, Y — некоторое K-пространство и $F: X \to Y \cup \{+\infty\}$ — выпуклый оператор, эффективное множество которого содержит внутреннюю точку, принадлежащую образу пространства X_1 при некотором аффинном отображении A_x, где $A \in L(X_1, X)$ и $x \in X$. Тогда для всякого $B \in L(X_1, Y)$ выполняется*

$$(F \circ A_x)^* B = \inf \{F^*C - Cx\colon B = C \circ A\}.$$

При этом последняя формула точная.

Для всякого оператора C такого, что $B = C \circ A$, имеем оценку

$$(F \circ A_x)^* B = \sup_{x_1 \in X_1} (Bx_1 - F(Ax_1 + x)) =$$
$$= -Cx + \sup_{x_1 \in X_1} (C(Ax_1 + x) - F(Ax_1 + x)) \leqslant F^*C - Cx.$$

С другой стороны, если $B \in \operatorname{dom}((F \circ A_x)^*)$, то для любых x_1, $h_1 \in X_1$ и $\alpha > 0$ имеем

$$B(x_1 + \alpha h_1) - (F \circ A_x)^* B \leqslant F(Ax_1 + x + \alpha A h_1).$$

Иными словами, в силу предложения VI для некоторого $x_1 \in X_1$ выполняется

$$B \in \partial(S(F - Bx_1 + (F \circ A_x)^* B,\ Ax_1 + x) \circ A) =$$
$$= \partial(S(F - Bx_1 + (F \circ A_x)^* B,\ Ax_1 + x)) \circ A.$$

Таким образом, найдется оператор C такой, что $B = C \circ A$ и при этом

$$Ch \leqslant F(Ax_1 + x + h) - Bx_1 + (F \circ Ax)^* B,$$

т. е. для всех $h \in X$ выполняется неравенство

$$Ch - Fh \leqslant C \circ Ax_1 + Cx + (F \circ A_x)^* B - Bx_1.$$

Последнее означает, что справедлива оценка

$$F^* C \leqslant Cx + (F \circ A_x)^* B,$$

завершающая доказательство.

С помощью приведенного предложения получим представление преобразования Юнга при суперпозиции с регулярным оператором.

VII. *Пусть* $F = \varepsilon_{\mathfrak{A}} \circ \langle \mathfrak{A} \rangle_y$, *где* $\mathfrak{A}$ — *слабо порядково ограниченное множество в* $L(X, Y)$ *и элемент* $y \in (Y^{\mathfrak{A}})_\infty$. *Пусть, далее,* $G : Y \to Z \cup \{+\infty\}$ — *возрастающий выпуклый оператор, действующий в K-пространство Z. Если в образе* $F[X]$ *имеется внутренняя точка эффективного множества оператора* G, *то для всякого* $A \in L(X, Z)$ *справедлива точная формула*

$$(G \circ F)^* A = \inf\{G^* (B \circ \Delta_{\mathfrak{A}}) - By : B \circ \langle \mathfrak{A} \rangle = A;$$
$$B \in L^+((Y^{\mathfrak{A}})_\infty, Z)\}.$$

Прежде всего, выберем такую точку $x \in X$, что Fx является внутренней в $\operatorname{dom}(G)$. Тогда, очевидно, точка $\Delta_{\mathfrak{A}} Fx$ является внутренней в $\operatorname{dom}(G \bullet \varepsilon_{\mathfrak{A}})$. Отсюда ввиду возрастания канонического оператора $\varepsilon_{\mathfrak{A}}$ и оператора G вытекает, что и точка $\langle \mathfrak{A} \rangle_y x$ является внутренней в $\operatorname{dom}(G \bullet \varepsilon_{\mathfrak{A}})$. Следовательно, применимо предложение VI, т. е. справедлива точная формула

$$(G \circ F)^* A = \inf\{(G \bullet \varepsilon_{\mathfrak{A}})^* B - By : A = B \circ \langle \mathfrak{A} \rangle;$$
$$B \in L((Y^{\mathfrak{A}})_\infty^{\sim}, Z)\}.$$

Если оператор B входит в $L^+((Y^{\mathfrak{A}})_\infty, Z)$, то

$$(G\circ\varepsilon_{\mathfrak{A}})^* B = \sup_{y_0\in(Y^{\mathfrak{A}})_\infty} (By_0 - G\circ\varepsilon_{\mathfrak{A}}y_0) \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{y_0\in(Y^{\mathfrak{A}})_\infty} (B\circ\Delta_{\mathfrak{A}}\circ\varepsilon_{\mathfrak{A}}y_0 - G\circ\varepsilon_{\mathfrak{A}}y_0) \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{y_1\in Y} (B\circ\Delta_{\mathfrak{A}}y_1 - Gy_1) = G^*(B\circ\Delta_{\mathfrak{A}}).$$

С другой стороны, если $B\in \mathrm{dom}((G\circ\varepsilon_{\mathfrak{A}})^*)$, то для всех $\alpha>0$ и $y_0\in(Y^{\mathfrak{A}})_\infty$ выполняется

$$B\circ\Delta_{\mathfrak{A}}Fx + \alpha By_0 - (G\circ\varepsilon_{\mathfrak{A}})^* B \leqslant$$
$$\leqslant G\circ\varepsilon_{\mathfrak{A}}(\Delta_{\mathfrak{A}}Fx + \alpha y_0) = G(Fx + \alpha\varepsilon_{\mathfrak{A}}y_0).$$

Привлекая предложение V, получаем

$$B\in\partial\left(S\left(G - B\circ\Delta_{\mathfrak{A}}Fx + (G\circ\varepsilon_{\mathfrak{A}})^* B, Fx\right)\circ\varepsilon_{\mathfrak{A}}\right).$$

Последнее означает, что оператор B — положительный и

$$B\circ\Delta_{\mathfrak{A}}\in\partial\left(S\left(G - B\circ\Delta_{\mathfrak{A}}Fx + (G\circ\varepsilon_{\mathfrak{A}})^* B, Fx\right)\right).$$

Значит, для любого $y_1\in Y$ справедлива оценка

$$B\circ\Delta_{\mathfrak{A}}y_1 \leqslant G(Fx + y_1) - B\circ\Delta_{\mathfrak{A}}Fx + (G\circ\varepsilon_{\mathfrak{A}})^* B,$$

т. е. $(G\circ\varepsilon_{\mathfrak{A}})^* B \geqslant G^*(B\circ\Delta_{\mathfrak{A}})$, что и нужно.

Приведенное предложение наталкивает на мысль, что существует общая формула «линеаризации» преобразования Юнга. И, действительно, такая формула имеет место.

VIII. *Пусть* $F: X\to Y\cup\{+\infty\}$ — *выпуклый оператор, действующий в упорядоченное векторное пространство* Y, *и задан* $G: Y\to Z\cup\{+\infty\}$ — *выпуклый оператор, действующий в некоторое К-пространство* Z *и при этом возрастающий. Тогда для каждого* $A\in L(X, Z)$ *справедлива точная формула*

$$(G\circ F)^* A = \inf\{(B\circ F)^* A + G^* B : B\in L(Y, Z)\},$$

при условии, что $F[\mathrm{dom}(F)]$ *содержит внутреннюю точку* $\mathrm{dom}(G)$.

Прежде всего, для любого $B \in L(Y, Z)$ имеем

$$(G \circ F)^* A = \sup_{x \in X}(Ax - G \circ Fx) = \sup_{x \in \mathrm{dom}(F)} (Ax - B \circ Fx + $$
$$+ B \circ Fx - G \circ Fx) \leqslant \sup_{x \in X}(Ax - B \circ Fx) + \sup_{x \in X}(B \circ Fx -$$
$$- G \circ Fx) \leqslant (B \circ F)^* A + \sup_{y \in Y}(By - Gy) = (B \circ F)^* A + G^* B.$$

Пусть теперь $A \in \mathrm{dom}((G \circ F)^*)$. Тогда для всех $t \in \mathbf{R}$ и $x \in X$ имеем

$$Ax - t(G \circ F)^* A \leqslant H_{G \circ F}(x, t).$$

Если считать, что $(H_F, 1)(x, t) = (H_F(x, t), t)$, то

$$H_{G \circ F} = H_G \circ (H_F, 1).$$

Заметим, что $\mathrm{dom}((H_F, 1)) = \mathrm{dom}(H_F)$ и, кроме того,

$$(H_F, 1)[\mathrm{dom}(H_F)] \cap \mathrm{dom}(H_G) \supset$$
$$\supset (F[\mathrm{dom}(F)] \cap \mathrm{dom}(G)) \times \{1\}.$$

Упорядочим $Y \times \mathbf{R}$ с помощью конуса $Y^+ \times \{0\}$. Оператор H_G при этом станет возрастающим, а оператор $(H_F, 1)$ — сублинейным. В силу предложения V пункта **3.5** выполняется

$$\partial(H_{G \circ F}) = \bigcup_{C \in \partial(H_G)} \partial(C \circ (H_F, 1)).$$

Иными словами, найдутся оператор $B \in L^+(Y, Z)$ и элемент $z \in Z$ такие, что для всех $x \in X$, $y \in Y$ и $t \in \mathbf{R}^+$ выполнены неравенства

$$Ax - t(G \circ F)^* A \leqslant tB \circ F(x/t) + tz;$$
$$By + tz \leqslant tG(y/t).$$

Отсюда вытекает, что

$$-z \geqslant G^* B; \quad (G \circ F)^* A \geqslant (B \circ F)^* A - z.$$

Эти неравенства завершают доказательство.

Из полученной в предложении VIII формулы вытекает ряд конкретных следствий. Например, справедливо следующее утверждение.

IX. *Пусть* $P: X \to Y \cup \{+\infty\}$ — *сублинейный оператор, действующий в упорядоченное векторное пространство* Y, *и* $G: Y \to Z \cup \{+\infty\}$ — *возрастающий выпуклый оператор, действующий в* K-*пространство* Z. *Тогда для всякого* $A \in L(X, Z)$ *справедлива точная формула*

$$(G \circ P)^* A = \inf \{G^* B : A \in \partial(B \circ P);\ B \in L^+(Y, Z)\}$$

(при условии, что в $P[\operatorname{dom}(P)]$ *есть внутренняя точка* $\operatorname{dom}(G)$*)*.

Рассмотрим только случай, когда $(G \circ P)^* A < +\infty$. Тогда по предложению VIII для некоторого $B \in L(Y, Z)$ выполняется

$$(G \circ P)^* A = (B \circ P)^* A + G^* B.$$

Поскольку $By - G^* B \leqslant Gy$ для $y \in Y$, то $B \in L^+(Y, Z)$. При этом $\sup\limits_{x \in X}(Ax - B \circ Px) = 0$, так что $A \in \partial(B \circ P)$. Отсюда и вытекает требуемое утверждение.

§ 4. ВЫПУКЛЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

В этом параграфе мы применим формулы субдифференциального исчисления для нахождения критериев оптимальности решений выпуклых экстремальных задач.

II.4.1. Пусть X — векторное пространство, Y и Z — упорядоченные векторные пространства, $F: X \to Y \cup \{+\infty\}$ и $G: X \to Z \cup \{+\infty\}$ — выпуклые операторы.

Упорядоченная пара операторов (G, F) в теории экстремальных задач называется *векторной выпуклой программой* или *векторной задачей оптимизации* и символически записывается в следующем виде:

$$Gx \leqslant 0, \quad Fx \longrightarrow \inf.$$

Оператор G называется *ограничением* программы, а оператор F — *целью* программы. Множество $U = \{x \in X : Gx \leqslant 0\}$ называется *допустимым*, а его элементы — *допустимыми решениями* или *планами* программы. Если существует элемент $y=\inf F[U]$, то y называется *значением программы*. Допустимый план x^* называется *оптимальным*, или *решением* векторной выпуклой программы, если $y=Fx^*$. Иногда говорят, что x^* есть *optimum optimorum*, или *идеальный оптимум* в рассматриваемой программе. Таким образом, учитывая введенную терминологию, можно сказать, что x^* — идеальный оптимум в том и только в том случае, если Fx^* — наименьший элемент образа допустимого множества при целевом отображении F.

Допустимый план x^0 называется *оптимальным по Парето*, или *решением программы на оптимум Парето*, если Fx^0 — минимальный элемент образа допустимого множества при целевом отображении F. В частности, оптимальный план является решением задачи на оптимум Парето. Обратное утверждение, разумеется, не верно.

Нас будут интересовать в дальнейшем критерии идеального оптимума и лишь отчасти критерии оптимальности по Парето.

Для векторных выпуклых программ особую роль играет понятие обобщенного решения. Именно, подмножество U^* допустимого множества U называется *обобщенным решением*, если имеет место равенство $\inf F[U^*]=\inf F[U]$.

Таким образом, идеальному оптимуму x^* отвечает случай, когда $\{x^*\}$ — обобщенное решение. Уместно здесь же подчеркнуть, что в то время как идеального оптимума в векторной задаче часто может не существовать, обобщенные решения существуют всегда, например, по тривиальной причине, что таким решением служит само допустимое множество. Ниже мы покажем, что любое обобщенное решение в свою очередь является оптимальным планом некоторой векторной выпуклой программы, так что класс разрешимых векторных задач оптимизации весьма широк.

Начнем с рассмотрения *задачи безусловной минимизации* $Fx\longrightarrow\inf$, т. е. со случая, когда ограничением программы служит индикатор $\delta_z(X)$.

I. *Элемент x^* является решением задачи $Fx\longrightarrow\inf$ в том и только в том случае, если $0\in\partial_{x^*}(F)$.*

Это предложение непосредственно вытекает из определений.

В дальнейшем мы будем предполагать, что Y является K-пространством, так как нетривиальные применения тривиального предложения I возможны лишь при наличии нетривиальной информации о строении субдифференциалов.

II. *Элемент x^* является решением задачи $Fx \longrightarrow \inf$ в том и только в том случае, если на конусе $\mathrm{Fd}_{x^*}(\mathrm{dom}(F))$ определена положительная производная по направлениям.*

Для доказательства достаточно сослаться на предыдущее предложение и предложение I пункта **3.1**.

Приведенные простые утверждения показывают роль формул для вычисления в теории экстремальных задач. В самом деле, умение учитывать детальную структуру оператора F при исследовании линеаризованной задачи $0 \in \partial_{x^*}(F)$ существенно облегчает анализ и улучшает качество возникающих критериев оптимальности. В качестве примера рассмотрим безусловную *задачу на минимакс.*

III. *Пусть $F_1, \ldots, F_n : X \to Y \cup \{+\infty\}$ — выпуклые операторы, причем конусы допустимых направлений $\mathrm{Fd}_{x^*}(\mathrm{dom}(F_1)), \ldots, \mathrm{Fd}_{x^*}(\mathrm{dom}(F_n))$ находятся в общем положении. Элемент x^* является решением задачи $F_1 \vee \ldots \vee F_n x \longrightarrow \inf$ в том и только в том случае, если совместна система условий*

$$\alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^* \in \Lambda(Y); \quad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^* = I_Y;$$

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^* \circ F_k x^* = F_1 x^* \vee \ldots \vee F_n x^*;$$

$$0 \in \partial_{x^*}(\alpha_1^* \circ F_1) + \ldots + \partial_{x^*}(\alpha_n^* \circ F_n).$$

Для доказательства достаточно сослаться на предложение I и следствие 2 теоремы 7.

Из этого предложения, в частности, получается критерий оптимальности в задаче при наличии ограничения $\delta_Y(U)$.

IV. *Пусть $U \subset \mathrm{dom}(F)$ и точка x^* — внутренняя в эффективном множестве $\mathrm{dom}(F)$. Элемент x^* является решением задачи $x \in U$, $Fx \longrightarrow \inf$ в том и только в том случае, если*

$$0 \in \partial_{x^*}(F) + \partial_{x^*}(\delta_Y(U)).$$

Действительно, рассматриваемая задача эквивалентна задаче безусловной оптимизации $(F+\delta_Y(U))x \longrightarrow \inf$. Применение предложения III приводит к требуемому результату.

Нам понадобится в дальнейшем следующий частный случай предложения IV.

V. *Элемент x^* является решением задачи*

$$Ax=Ax^*, \quad Fx \longrightarrow \inf,$$

где $A \in L(X, Z)$ и $\operatorname{dom}(F)=X$, в том и только в том случае, если найдется оператор $B \in L(Z, Y)$ такой, что

$$0 \in \partial_{x^*}(F)+B \circ A.$$

В силу предложения IV имеем следующий критерий оптимальности

$$0 \in \partial_{x^*}(F)+\partial_{x^*}(\delta_Y(\{x \in X : Ax=Ax^*\})).$$

Кроме того, прямым вычислением устанавливается, что

$$\partial_{x^*}(\delta_Y(\{x \in X : Ax = Ax^*\})) =$$
$$= \{C \in L(X, Y) : \operatorname{Ker}(C) \supset \operatorname{Ker}(A)\},$$

откуда и вытекает требуемый результат.

II.4.2. Разберем способ получения критериев обобщенных решений. Сначала для пояснения идеи соответствующей общей конструкции изучим случай конечных обобщенных решений.

I. *Пусть $U \subset \operatorname{dom}(F)$ и точки $\overset{*}{x}_1, \ldots, \overset{*}{x}_n$ являются внутренними в $\operatorname{dom}(F)$. Множество $U^*=\{\overset{*}{x}_1, \ldots, \overset{*}{x}_n\}$ является обобщенным решением программы $x \in U$, $Fx \longrightarrow \inf$ в том и только в том случае, если совместна система условий*

$$\overset{*}{\alpha}_1, \ldots, \overset{*}{\alpha}_n \in \Lambda(Y); \quad \sum_{k=1}^{n} \overset{*}{\alpha}_k = I_Y;$$

$$\sum_{k=1}^{n} \overset{*}{\alpha}_k \circ F\overset{*}{x}_k = F\overset{*}{x}_1 \wedge \ldots \wedge F\overset{*}{x}_n;$$

$$0 \in \overset{*}{\alpha}_k \circ \partial_{\overset{*}{x}_k}(F)+\partial_{\overset{*}{x}_k}(\delta_Y(U)) \quad (k=1, \ldots, n).$$

Применив предложение II пункта 1.5 к каноническому оператору, найдем мультипликаторы $\overset{*}{\alpha}_1, \ldots, \overset{*}{\alpha}_n \in \in \Lambda_{\cdot}(Y)$ такие, что

$$\overset{*}{\alpha}_1 + \ldots + \overset{*}{\alpha}_n = I_Y;$$

$$\sum_{k=1}^{n} \overset{*}{\alpha}_k \circ F x_k^* = F x_1^* \wedge \ldots \wedge F x_n^*.$$

Заметим, теперь, что U^* является обобщенным решением рассматриваемой задачи в том и только в том случае, если элемент $\mathfrak{X}^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ является оптимальным планом следующей выпуклой программы

$$\mathfrak{X} = (x_1, \ldots, x_n) \in U^n, \quad F_* \mathfrak{X} \longrightarrow \inf;$$

$$F_* \mathfrak{X} = \overset{*}{\alpha}_1 \circ F x_1 + \ldots + \overset{*}{\alpha}_n \circ F x_n.$$

Таким образом, привлекая предложение IV пункта **4.1**, видим, что критерий обобщенного решения состоит в следующем:

$$0 \in \partial_{\mathfrak{X}^*}(F_*) + \partial_{\mathfrak{X}^*}(\delta_Y(U^n)).$$

Вычисляя найденные субдифференциалы, получаем требуемое.

Перейдем теперь к обобщенным решениям произвольной мощности.

Рассмотрим пространство X^{U^*} и на нем оператор

$$F^* : X^{U^*} \rightarrow Y^{U^*} \cup \{+\infty\};$$

$$F^* \mathfrak{X} : x^* \longrightarrow F \mathfrak{X}(x^*).$$

Положим $\mathfrak{X}^* : x^* \longrightarrow x^*$ и допустим, что для всякого элемента $\mathfrak{X} \in (\operatorname{dom}(F))^{U^*}$ выполняется $F^* \mathfrak{X} \in (Y^{U^*})_\infty$ и, кроме того, что точка $\mathfrak{X}^*$ является внутренней в $(\operatorname{dom}(F))^{U^*}$.

II. *Множество U^* является обобщенным решением задачи $x \in U$, $Fx \longrightarrow \inf$ в том и только в том случае, если совместна система условий*

$$\alpha^* \in L^+((Y^{U^*})_\infty, Y);$$

$$\alpha^* \bullet \Delta_{U^*} = I_Y;$$

$$\alpha^* \circ F^* \mathfrak{X}^* = \inf_{x^* \in U^*} F x^*;$$

$$0 \in \partial_{\mathfrak{X}^*}(\alpha^* \circ F^*) + \partial_{\mathfrak{X}^*}\left(\delta_Y\left(U^{U^*}\right)\right).$$

Найдем оператор $\alpha^* \in L\left(\left(Y^{U^*}\right)_\infty, Y\right)$ из условия

$$\alpha^* \in \partial_{-F^*\mathfrak{X}^*}(\varepsilon_{U^*, Y}).$$

Тогда по предложению II пункта **2.2** и предложению II пункта **1.5** выполняется

$$\alpha^* \geqslant 0; \quad \alpha^* \circ \Delta_{U^*, Y} = I_Y;$$

$$\alpha^* \circ F^* \mathfrak{X}^* = -\varepsilon_{U^*, Y}(-F^* \mathfrak{X}^*) = \inf_{x^* \in U^*} F x^*.$$

Допустим, что U^* — обобщенное решение. Тогда для элемента $\mathfrak{X} \in U^{U^*}$ последовательно имеем

$$\alpha^* \circ F^* \mathfrak{X} \geqslant \inf_{x^* \in U^*} F^* \mathfrak{X}(x^*) \geqslant \inf_{x \in U} F x =$$

$$= \inf_{x^* \in U^*} F x^* = \alpha^* \circ F^* \mathfrak{X}^*,$$

т. е. $\mathfrak{X}^*$ — оптимальный план в программе

$$\mathfrak{X} \in U^{U^*}, \quad \alpha^* \circ F^* \mathfrak{X} \to \inf.$$

Наоборот, если $\mathfrak{X}^*$ — решение последней задачи, то для всякого $x \in U$ выполняется

$$\alpha^* \circ F^* \mathfrak{X}^* \leqslant \alpha^* \circ F^* \circ \Delta_{U^*, X} x = \alpha^* \circ \Delta_{U^*, Y} F x = F x.$$

Таким образом, справедливы оценки

$$\inf_{x^* \in U^*} F x^* = \alpha^* \circ F^* \mathfrak{X}^* \leqslant \inf_{x \in U} F x \leqslant \inf_{x^* \in U^*} F x^*,$$

т. е. множество U^* является решением исходной задачи.

Привлекая теперь предложение IV пункта **4.1**, получаем, что U^* — обобщенное решение в том и только в том случае, если

$$0 \in \partial_{\mathfrak{X}^*}\left(\alpha^* \circ F^* + \delta_Y\left(U^{U^*}\right)\right),$$

что и требовалось установить.

II.4.3. Перейдем теперь к получению критериев оптимальности общих векторных задач оптимизации.

В этом пункте мы рассмотрим программу

$$Gx \leqslant 0, \quad Fx \longrightarrow \inf;$$

$$F, G: X \to Y \cup \{+\infty\},$$

где ограничения и цель — выпуклые операторы, причем для простоты считается, что $\operatorname{dom}(G) = X$. Рассматриваемая задача называется *регулярной,* если

(а) для каждого $x \in X$ либо $Gx \leqslant 0$, либо $Gx \geqslant 0$,

(б) существует точка $x_0 \in \operatorname{dom}(F)$ такая, что элемент $-Gx_0$ является единицей в Y.

Теорема 8 (4.III). *Допустимая точка x^* является оптимальной в регулярной задаче в том и только в том случае, если совместна следующая система условий:*

$$\alpha^*, \ \beta^* \in \Lambda(Y);$$

$$\alpha^* + \beta^* = I_Y; \quad \operatorname{Ker}(\alpha^*) = \{0\};$$

$$0 \in \partial_{x^*}(\alpha^* \circ F) + \beta^* \circ \partial_{x^*}(G);$$

$$\beta^* \circ Gx^* = 0.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть x^* — решение задачи. Рассмотрим следующее отображение:

$$\Phi : x \longrightarrow (Fx - Fx^*) \vee Gx.$$

Тогда $\Phi : X \to Y \cup \{+\infty\}$ — выпуклый оператор, причем $\Phi x \geqslant 0$ для всех $x \in X$. В самом деле, если x — допустимый элемент, то $Fx \geqslant Fx^*$ и, стало быть, $\Phi x \geqslant 0$. Если x — не допустимая точка, то $Gx \geqslant 0$, а потому и $\Phi x \geqslant 0$. Кроме того, $\Phi x^* = 0 \vee Gx^* = 0$, ибо $Gx^* \leqslant 0$.

Таким образом, точка x^* — решение задачи безусловной минимизации $\Phi x \longrightarrow \inf$ и по предложению I пункта **4.1.** выполняется

$$0 \in \partial_{x^*}(\Phi).$$

Выполняя субдифференцирование, найдем мультипликаторы α^*, $\beta^* \in \Lambda(Y)$ такие, что $\alpha^*+\beta^*=I_Y$ и, кроме того,

$$\mathbf{0} \in \partial_{x^*}(\alpha^* \circ F) + \beta^* \circ \partial_{x^*}(G);$$

$$\alpha^*(Fx^*-Fx^*)+\beta^* \circ Gx^* = \Phi x^*,$$

так что $\beta^* \circ Gx^* = \mathbf{0}$.

Установим теперь обратимость мультипликатора α^*. Для этого выберем такую реализацию K-пространства Y в качестве фундамента пространства $C_\infty(Q)$, в которой элемент $-Gx_0$ представляется функцией $\mathbf{1}$, тождественно равной единице на Q. Используя результаты пункта **2.3**, найдем единственную непрерывную функцию α_* такую, что для всех $y \in C_Q$ выполняется

$$0 \leqslant \alpha_*(q) \leqslant 1; \qquad \alpha^* y(q) = \alpha_*(q) y(q)$$

в каждой точке $q \in Q$.

Если $\operatorname{Ker}(\alpha^*) \neq \{\mathbf{0}\}$, то найдется открытое множество U в Q такое, что $\alpha_* | U = \mathbf{0}$. Отсюда непосредственно следует, что для всякой точки $u \in U$ и произвольного $y \in Y$ выполняется равенство $(\alpha^* y)(u) = 0$, поскольку в силу уже установленного

$$\alpha^* \circ Fx^* \leqslant \alpha^* \circ Fx_0 + \beta^* \circ Gx_0 = \alpha^* \circ Fx_0 - \beta^* \mathbf{1}.$$

В частности, в точке $u \in U$ выполняется

$$0 = \alpha^* \circ Fx^*(u) \leqslant -\beta^* \mathbf{1}(u) = -1,$$

поскольку ясно, что $\alpha_* + \beta_* = \mathbf{1}$. Таким образом, $\operatorname{Ker}(\alpha^*) = \{\mathbf{0}\}$.

Достаточность. В силу условий на субдифференциалы для всякой точки $x \in X$, для которой $Gx \leqslant \mathbf{0}$, имеем

$$\alpha^* \circ Fx^* = \alpha^* \circ Fx^* + \beta^* \circ Gx^* \leqslant \alpha^* \circ Fx + \beta^* \circ Gx \leqslant \alpha^* \circ Fx.$$

Так как $\operatorname{Ker}(\alpha^*) = \{\mathbf{0}\}$, то по определению III пункта **2.3** α^* есть порядковый изоморфизм Y на $\alpha^*[Y]$, т. е. для допустимых $x \in X$ выполняется $Fx^* \leqslant Fx$, т. е. x^* — оптимальное решение.

Теорема доказана полностью.

II.4.4. В этом пункте мы рассмотрим следующую наиболее типичную в приложениях задачу оптимизации:

$$Ax = Ax^*, \quad Gx \leqslant \mathbf{0}, \quad Fx \longmapsto \inf,$$

где X, X_1 — векторные пространства, $A \in L(X, X_1)$ — линейный оператор, Z — архимедова векторная решетка ограниченных элементов, Y — это K-пространство с сильной единицей $\mathbf{1}_Y$. Операторы $G : X \to Z \cup \{+\infty\}$ и $F : X \to Y \cup \{+\infty\}$ выпуклы и для простоты удовлетворяют условию $\operatorname{dom}(G) = \operatorname{dom}(F) = X$.

Рассматриваемая задача векторной оптимизации называется *регулярной в смысле Слейтера,* если для некоторой допустимой точки x_0 элемент $-Gx_0$ является сильной единицей в Z.

Теорема 9(4.II). *Допустимая точка x^* является оптимальной в регулярной в смысле Слейтера задаче в том и только в том случае, если совместна система условий*

$$\lambda^* \in L^+(Z, Y); \quad \mu^* \in L(X_1, Y);$$

$$\lambda^* \circ Gx^* = \mathbf{0};$$

$$\mathbf{0} \in \partial_{x^*}(F) + \partial_{x^*}(\lambda^* \circ G) + \mu^* \circ A.$$

Доказательство. Достаточность приведенного условия очевидна. Установим только его

Необходимость. Реализуем Z как плотное подпространство в C_Q для некоторого компакта Q так, чтобы элемент $-Gx_0$ превратился в функцию $\mathbf{1}$, тождественно равную единице на Q, и рассмотрим следующий оператор

$$\varepsilon \otimes \mathbf{1}_Y : Z \longrightarrow Y;$$

$$\varepsilon \otimes \mathbf{1}_Y : z \longrightarrow \max\{z(q) : q \in Q\} \mathbf{1}_Y.$$

Положим $U = \{x \in X : Ax = Ax^*\}$. Ясно, что исходная задача эквивалентна следующей выпуклой программе

$$\varepsilon \otimes \mathbf{1}_Y \circ Gx \leqslant \mathbf{0}, \quad F_U x \longrightarrow \inf,$$

где $F_U = F + \delta_Y(U)$ — срезка оператора F. Для последней программы выполнены условия, обеспечивающие ее регулярность. В самом деле, оператор $\varepsilon\otimes 1_Y\circ G$ действует в $Y\cup\{+\infty\}$, при этом

$$\varepsilon\otimes 1_Y\circ Gx_0=\max\{-1(q):q\in Q\}1_Y=-1_Y.$$

Таким образом, в силу теоремы 8 совместна система условий

$$\alpha^*,\ \beta^*\in\Lambda(Y);\ \alpha^*+\beta^*=I_Y;\ \operatorname{Ker}(\alpha^*)=\{0\};$$
$$0\in\partial_{x^*}(\alpha^*\circ F_U)+\beta^*\circ\partial_{x^*}(\varepsilon\otimes 1_Y\circ G);$$
$$\beta^*\circ\varepsilon\otimes 1_Y\circ Gx^*=0.$$

Привлекая предложение V пункта 4.1 и теорему 6, последовательно получаем

$$\begin{aligned}\partial_{x^*}(\alpha^*\circ F_U)&=\partial_{x^*}(\alpha^*\circ F)+\partial_{x^*}(\alpha^*\circ\delta_Y(U))=\\&=\alpha^*\circ\partial_{x^*}(F)+\partial_{x^*}(\delta_Y(U))=\alpha^*\circ\partial_{x^*}(F)+\\&+\{\mu\circ A:\mu\in L(X_1,Y)\}.\end{aligned}$$

Кроме того, в силу теоремы 7 выполняется

$$\partial_{x^*}(\varepsilon\otimes 1_Y\circ G)=\bigcup_{\lambda\in\partial_{Gx^*}(\varepsilon\otimes 1_Y)}\partial_{x^*}(\lambda\circ G).$$

При этом, как уже отмечалось ранее (ср. предложение I пункта 2.2), справедливо представление

$$\partial(\varepsilon\otimes I_Y)=\{A\in L^+(Z,\ Y):A1=1_Y\}.$$

Таким образом, для некоторых $\lambda_1\in\partial_{x^*}(\varepsilon\otimes 1_Y)$ и $\mu_1\in\in L(X_1,\ Y)$ имеет место включение

$$0\in\alpha^*\circ\partial_{x^*}(F)+\beta^*\circ\partial_{x^*}(\lambda_1\circ G)+\beta^*\circ\mu_1,$$

при этом выполняется равенство

$$\lambda_1\circ Gx^*=\varepsilon\otimes 1_Y(Gx^*).$$

Таким образом, привлекая полученные условия, имеем

$$\beta^*\circ\lambda_1\circ Gx^*=\beta^*\circ\varepsilon\otimes 1_Y\circ Gx^*=0;$$

Воспользовавшись тем, что $\mathrm{Ker}(\alpha^*)=\{0\}$ и как очевидно, $\alpha^*[Y]=Y$, полагая

$$\alpha^{*-1}\circ\beta^*\circ\lambda_1=\lambda^*;$$
$$\alpha^{*-1}\circ\beta^*\circ\mu_1=\mu^*,$$

получаем требуемый критерий оптимальности в субдифференциальной форме.

Замечание 1. Теорема 9, по существу, обосновывает правомерность применения *метода множителей Лагранжа.* Именно, она утверждает, что оптимальные планы — это в точности те допустимые элементы, которые являются решениями задачи безусловной минимизации *лагранжиана*

$$(F+\lambda^*\circ G+\mu^*\circ A)\,x\longrightarrow\inf$$

при соответствующих условиях на параметры λ^*, μ^* — *множители Лагранжа.* Наличие сильной единицы в пространстве значений цели обеспечивает отсутствие множителя при F. В случае же, когда в указанном пространстве есть обычная единица, такой множитель появляется так же, как и в теореме 8, где речь идет о лагранжиане

$$(\alpha^*\circ F+\beta^*\circ G)\,x\longrightarrow\inf.$$

Мы не формулируем здесь соответствующий критерий ввиду его громоздкости.

Замечание 2. Метод сведения регулярной в смысле Слейтера задачи к регулярной задаче пункта **4.3** называется *скаляризацией.* Нетрудно видеть, что скаляризация возможна не только в случае решеток ограниченных элементов.

Замечание 2. Метод сведения регулярной в функция Ф, которую мы использовали в доказательстве теоремы 8, являются примерами так называемых *операторов штрафа.* В частности, оператор Ф называется *штрафом Иоффе.*

В заключение этого пункта покажем, как использовать полученные результаты для нахождения критериев обобщенных решений. Простоты ради ограничимся случаем конечного решения в регулярной в смысле Слейтера задаче.

Теорема 11 (4.II). *Множество* $\{x_1^*, \ldots, x_n^*\}$ *является обобщенным решением регулярной в смысле Слейтера задачи в том и только в том случае, если совместна система условий*

$$\alpha_k^* \in \Lambda(Y); \quad \lambda_k^* \in L^+(Z, Y); \quad \mu_k^* \in L(X_1, Y);$$

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^* = I_Y; \quad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^* \circ Fx_k^* = Fx_1^* \wedge \ldots \wedge Fx_n^*;$$

$$Ax_k^* = Ax^*; \quad Gx_k^* \leqslant \mathbf{0}; \quad \lambda_k^* \circ Gx_k^* = \mathbf{0};$$

$$\mathbf{0} \in \alpha_k^* \circ \partial_{x_k^*}(F) + \partial_{x_k^*}(\lambda_k^* \circ G) + \mu_k^* \circ A;$$

$$k = 1, \ldots, n.$$

Доказательство. Наметим только схему рассуждений. Прежде всего, заметим, что исходная программа эквивалентна следующей задаче $x \in U$, $Fx \to \inf$, где U — допустимое множество. Применив теперь предложение I пункта **4.2** и предложение IV пункта **4.1**, найдем такие мультипликаторы $\alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^* \in \Lambda(Y)$, что для каждого $k = 1, \ldots, n$ элемент x_k^* есть решение регулярной в смысле Слейтера задачи

$$Ax = Ax^*, \quad Gx \leqslant \mathbf{0}, \quad \alpha_k^* \circ Fx \to \inf.$$

Применяя к последней системе программ теорему 9, приходим к требуемому критерию, так как на каждом шаге рассуждений мы использовали необходимые и достаточные признаки.

II.4.5. В этом пункте мы получим критерий оптимальности в смысле Парето. Для простоты ограничимся случаем регулярной в смысле Слейтера задачи и будем считать пространство значений оператора цели архимедовой векторной решеткой ограниченных элементов.

Теорема 11 (4.II). *Если элемент* x^0 *является решением на оптимум Парето регулярной в смысле Слейтера выпуклой программы, то найдутся функционалы* α^0,

β^0 и γ^0 на пространствах Y, Z и X соответственно, удовлетворяющие условиям

$$\alpha_0 > 0; \quad \beta^0 \geqslant 0; \quad \beta^0 \circ G x^0 = 0;$$
$$0 \in \partial_{x^0}(\alpha^0 \circ F) + \partial_{x^0}(\beta^0 \circ G) + \gamma^0 \circ A.$$

Если при этом $\operatorname{Ker}(\alpha^0) \cap Y^+ = \{0\}$, *то справедливость выписанных условий для допустимой точки x^0 обеспечивает оптимальность x^0 по Парето.*

Доказательство. Пусть $1_Z = -Gx_0$ — сильная единица в Z и 1_Y — сильная единица в Y. Положим

$$\varepsilon_{1_Z} : z \to \inf\{\delta \in \mathbf{R} : z \leqslant \delta 1_Z\}; \quad \varepsilon_{1_Z} : Z \to \mathbf{R};$$
$$\varepsilon_{1_Y} : y \to \inf\{\delta \in \mathbf{R} : y \leqslant \delta 1_Y\}; \quad \varepsilon_{1_Y} : Y \to \mathbf{R}.$$

Тогда исходная задача эквивалентна программе

$$\varepsilon_{1_Z} \otimes 1_Y \circ Gx \leqslant 0, \quad F_U x \to \inf,$$

где $U = \{x \in X : Ax = Ax^*\}$. Рассмотрим соответствующий штраф Иоффе

$$\Phi x = (F_U x - F_U x^0) \vee \varepsilon_{1_Z} \otimes 1_Y \circ Gx.$$

Очевидно, что x^0 является оптимумом Парето в безусловной задаче $\Phi x \longrightarrow \inf$. При этом $\Phi x^0 = 0$. Иными словами, x^0 есть решение скалярной задачи $\varepsilon_{1_Y} \circ \Phi x \to \inf$ и, значит,

$$0 \in \partial_{x^0}(\varepsilon_{1_Y} \circ \Phi).$$

Применяя теорему 7, найдем функционал λ на Y такой, что

$$\lambda \geqslant 0; \quad \lambda(1_Y) = 1; \quad \lambda \circ \Phi x^0 = 0;$$
$$0 \in \partial_{x^0}(\lambda \circ \Phi).$$

Воспользовавшись теперь следствием 3 теоремы 7, найдем положительные функционалы α^0, β такие, что $\alpha^0 + \beta = \lambda$ и, кроме того,

$$\lambda \circ \Phi x^0 = \alpha^0 (F_U x^0 - F_U x^0) + \beta \circ \varepsilon_{1_Z} \otimes 1_Y \circ Gx^0;$$
$$0 \in \partial_{x^0}(\alpha^0 \circ F_U) + \partial_{x^0}(\beta \circ \varepsilon_{1_Z} \otimes 1_Y \circ G).$$

Очевидно, что при этом выполняются соотношения

$$\beta \circ \varepsilon_{1_Z} \otimes \mathbf{1}_Y \circ G = \beta(\mathbf{1}_Y)\, \varepsilon_{1_Z} \circ G;$$
$$\beta(\mathbf{1}_Y)\, \varepsilon_{1_Z} \circ Gx^0 = 0.$$

Вычисляя субдифференциал $\partial_{x^0}\left(\varepsilon_{1Z} \circ G\right)$, найдем функционал β_0 на Z такой, что

$$\beta_0 \geqslant 0; \quad \beta_0(\mathbf{1}_Z) = 1; \quad \beta_0 \circ Gx^0 = \beta_0 \circ \varepsilon_{1_Z} \circ Gx^0;$$
$$0 \in \partial_{x^0}(\alpha^0 \circ F_U) + \beta(\mathbf{1}_Y)\, \partial_{x^0}(\beta_0 \circ G).$$

Полагая $\beta^0 = \beta(\mathbf{1}_Y)\beta_0$, получаем соотношения

$$0 \in \partial_{x^0}(\alpha^0 \circ F_U) + \partial_{x^0}(\beta^0 \circ G);$$
$$\beta^0 \circ Gx^0 = \beta(\mathbf{1}_Y)\, \beta_0 \circ Gx^0 = \beta(\mathbf{1}_Y)\, \varepsilon_{1_Z} \circ Gx^0 = 0.$$

Вычисляя теперь субдифференциал $\partial_{x^0}(\alpha^0 \circ F_U)$ (см. предложение V пункта **4.1**), получаем все требуемые соотношения. При этом $\alpha^0 \neq 0$ ввиду регулярности исходной задачи в смысле Слейтера. Оставшаяся часть теоремы очевидна.

Замечание 1. Как видно, при доказательстве теоремы 11 нами использовалось только наличие внутренних точек в конусах Z^+ и Y^+.

Замечание 2. Теорема 11 показывает, что задача нахождения оптимума Парето сводится к скалярной задаче оптимизации. С одной стороны, это обстоятельство объясняет широкую распространенность понятий, связанных с оптимальностью по Парето,— существуют эффективные методы численного решения скалярных программ. С другой стороны, тот факт, что оптимум Парето приписывает (хотя и апостериори) предпочтения первоначально несопоставимым целям, служит основанием критики этого понятия в современной экономической литературе по задачам многокритериального принятия решений. Однако подробное обсуждение затронутой темы может увести нас слишком далеко.

11.4.6. В предыдущих пунктах мы установили справедливость *принципа Лагранжа* для широкого класса программ. Именно, решение векторной программы при выполнении условий регулярности является решением безусловной задачи для подходящего лагранжиана.

Сейчас мы расширим область применимости этого принципа.

Прежде всего, напомним, что т. н. г. образа допустимого множества при целевом отображении называется значением программы.

Теорема 12 (4.II). *Конечное значение регулярной в смысле Слейтера программы является значением безусловной задачи для подходящего лагранжиана.*

Доказательство. Пусть $y \in Y$ — значение программы и $U = \{x \in X : Ax = Ax^*\}$. Рассмотрим штраф Иоффе

$$\Phi x = (F_U x - y) \vee \varepsilon \otimes \mathbf{1}_Y \circ Gx.$$

Ясно, что Φ — положительный выпуклый оператор, причем

$$0 \leqslant \inf_{x \in X} \Phi x \leqslant \inf \{\Phi x : Ax = Ax^*;\ Gx \leqslant 0\} \leqslant 0.$$

Иными словами, в терминах преобразования Юнга имеем

$$\Phi^* 0 = 0.$$

Заметим, что штраф Иоффе допускает представление в виде

$$\Phi x = P(F_U x - y,\ Gx),$$

где $P : Y \times Z \longrightarrow Y$ — сублинейный оператор, определенный соотношением

$$P : (y,\ z) \longrightarrow y \vee \varepsilon \otimes \mathbf{1}_Y z.$$

В силу точной формулы предложения II из **3.6** и правил для вычисления $\partial(P)$ совместна система условий

$$\alpha^*,\ \beta^* \in \Lambda(Y);\ \alpha^* + \beta^* = I_Y;$$
$$\lambda_1 \in \partial(\varepsilon \otimes \mathbf{1}_Y);$$
$$0 = \alpha^* \circ F_U - \alpha^* y + \beta^* \circ \lambda_1 \circ G)^* 0.$$

Отсюда непосредственно вытекает, что $\mathrm{Ker}(\alpha^*) = \{0\}$ и, более того, $\alpha^*[Y] = Y$. Таким образом, для некоторого $\gamma^* \in L^+(Z,\ Y)$ имеем

$$y = -(F_U + \gamma^* \circ G)^* 0.$$

Окончательно вычисляя преобразование Юнга к срезке, найдем $\mu^* \in (X_1, Y)$, для которого

$$y = -(F + \gamma^* \circ G + \mu^* \circ A_{-Ax^*})^* \mathbf{0}.$$

Иными словами, получается равенство

$$y = \inf_{x \in X} (Fx + \gamma^* \circ Gx + \mu^* (Ax - Ax^*)),$$

которое и нужно было проверить.

Факт, установленный теоремой 12, называют *принципом Лагранжа для значений* векторных программ.

Глава III

ГРАНИЦЫ ШОКЕ В *К*-ПРОСТРАНСТВАХ

В предисловии к монографии [1] Эрик Алфсен пишет: «Теоремы об интегральном представлении Шоке и Бишопа — де Лю вместе с теоремой единственности Шоке ознаменовали, фактически, новую эру в бесконечномерной выпуклости. Эти теоремы, считавшиеся любопытными и технически трудными, приковали внимание многих математиков и доказательства их были постепенно упрощены и вложены в рамки общей теории».

С первым утверждением этой фразы можно согласиться безоговорочно. Действительно, теория Шоке содержит унифицированный подход к интегральным представлениям в задачах разнообразных дисциплин — в теории потенциала, теории равномерных алгебр, выпуклом анализе, эргодической теории и т. д. Быть может, еще большее влияние на многие отделы анализа оказало появление новых технических средств. Речь прежде всего идет о классической упорядоченности Шоке, т. е. об отношении порядка, наводимого выпуклыми функциями в конусе положительных борелевских регулярных мер, и о максимальных в этом упорядочении вероятностных мерах.

Второе утверждение о существовании ясной общей теории границ и максимальных операторов представляется куда более спорным. Действительно, задача о строении упорядоченностей, наводимых различными классами выпуклых функций и множеств, — это, помимо всего прочего, ключевой пункт исследования любых экстремальных задач с выпуклыми решениями (например, задач изопериметрического типа в теории выпуклых поверхностей или задач выпуклой аппроксимации). Однако имеющийся запас информации об устройстве таких отношений порядка все еще недостаточен для получения эффективных субдифференциальных критериев оптимальности ряда экстремальных задач.

Теория Шоке описывает главным образом строение максимальных мер Радона. В то же время приложения (теория потенциала, задачи о пробных функциях в теории аппроксимации, задачи геометрии банаховых сфер, задачи теории супремальных генераторов и т. д.) требуют сведений о характеристике максимальных операторов в общем случае. Действительно, в естественном смысле оказываются максимальными такие отображения, как проектор на границу Шоке, интеграл Пуассона и обобщенное решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа, регулярные булевские меры, градиенты норм в точках гладкости и т. д. Однако результаты в указанном направлении практически отсутствуют, несмотря на большое число модификаций и обобщений конструкций теории Шоке.

Именно в связи с изложенными обстоятельствами Г. Шоке в 1961 году поставил общие задачи о характеристике положительных линейных функционалов, максимальных относительно выделенного конуса в векторной решетке. К сожалению, предложенная схема обладала существенным недостатком — в ней не было места основному объекту теории — границе Шоке.

Развиваемая в настоящей главе мысль состоит в том, что граница Шоке в исходной постановке не возникает по сути дела. Граница Шоке есть объект, внешний по отношению к исходному упорядоченному пространству,— это компонента некоторого K-пространства, более общо — элемент полной булевской алгебры, которая и используется для характеристики максимальных операторов. Разумеется, что при таком подходе изучению подлежат максимальные операторы, связанные с внешним K-пространством. Таким образом, возникает расслоение основной задачи по выбираемым булевским алгебрам и соответствующий спектр границ.

Указанное соображение позволяет строить удовлетворительную теорию максимальных операторов, изложение которой и составляет содержание текущей главы. При этом представлялось целесообразным основной акцент сделать на описание методов теории Шоке в K-пространствах, технические и идейные стороны которой до последнего времени достаточно не освещались. Здесь же уместно отметить, что необходимость привлечения более широкого набора булевских алгебр для характеристики максимальных мер была осознана достаточно давно. Дело в том, что стандартные алгебры борелевских или бэровских множеств исходного компакта, вообще говоря, слишком бедны для полного описания граничных форм. Ниже будет показано, что природа этого явления чисто K-пространственная. Более того, оказывается, что в рамках теории упорядоченных векторных пространств можно не только построить достаточно широкую булевскую алгебру, пригодную для характеристики максимальных функционалов, но и показать, что существенные черты теории сохраняются на самом деле для произвольных K-пространств.

В качестве центрального прикладного аспекта теории Шоке мы выделили вопрос о правильной постановке абстрактной задачи Дирихле. Дело в том, что в настоящее время это единственная теория, высказывающая общие рекомендации о том, где следует задавать начальные данные краевых задач. Мы надеемся, что читатель активно заинтересуется обсуждаемыми в этой связи проблемами — проблемами, где многое (если не всё) еще предстоит сделать.

В заключение сделаем замечание технического характера. Всюду в этой главе при рассмотрении векторных решеток мы используем полные отношения дизъюнктности и соответствующую терминологию (см. I.2.5).

§ 1. ГРАНИЦА ШОКЕ И ЯДРА МАКСИМАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В этом параграфе основной нашей целью будет построение границы Шоке и выяснение ее связей со строением максимальных операторов.

III.1.1. Прежде всего опишем ситуацию, являющуюся объектом исследования теории Шоке в K-пространствах. Начнем с двух основных и, в известном смысле, классических примеров, мотивирующих основную диаграмму.

Рассмотрим стандартную ситуацию граничной теории Шоке. Пусть Q — компактное топологическое пространство и H — конус в пространстве C_Q непрерывных на Q функций. Последнее пространство, как всегда, считается наделенным канонической структурой банаховой решетки ограниченных элементов. Конус H называется *адаптированным*, если H содержит константы, разделяет точки Q и, кроме того, является *верхней решеткой,* т. е. если $h_1, h_2 \in H$, то $h_1 \vee h_2 \in H$. Замкнутый конус называется *допустимым*, если он удовлетворяет первым двум из приведенных условий. Отметим, что наименьшая верхняя решетка, натянутая на допустимый конус, адаптирована.

Адаптированный конус H наводит упорядоченность $\succ_H$ в конусе положительных регулярных борелевских мер. Именно, $\mu \succ_H \nu$ означает, что $\mu - \nu \in H^*$, где $H^* = \{\gamma \in (C_Q)' : \gamma(h) \geqslant 0 \quad (h \in H)\}$ — конус, двойственный к H. Максимальные элементы в упорядочении $\succ_H$ называются *максимальными мерами.*

Точка $x \in Q$ входит в *границу Шоке* $\mathrm{Ch}(H)$ конуса H, если *мера Дирака* $\varepsilon_x : f \to f(x)$ является максимальной. Иными словами, $x \in \mathrm{Ch}(H)$ в том и только в том случае, если $f(x) = \mathrm{co}_H f(x)$ для всех $f \in C_Q$. Здесь $\mathrm{co}_H f$ — это *H-выпуклая оболочка функции* f, т. е. $\mathrm{co}_H f(x) = \sup\{h(x) : h \in H,\ h \leqslant f\}$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема Шоке — Бишопа — де Лю. *Максимальные меры обращаются в нуль на компактах типа G_δ, не задевающих границу Шоке. При этом для каждой точки $x \in Q$ существует максимальная мера μ_x такая, что $\mu_x \succ_H \varepsilon_x$.*

Эта теорема допускает частичное обращение. Именно, мера, обращающаяся в нуль на всех компактах, не задевающих границу Шоке, максимальна.

Заметим, что в описанной ситуации лишь одно из понятий не может быть, вообще говоря, описано во внутренних терминах пространства C_Q. Таким понятием является граница Шоке, определение которой, как видно, использует верхние грани бесконечных множеств функций. При этом последние грани вычисляются поточечно, т. е. представляют собой супремумы соответствующих множеств в K-пространстве $l_\infty(Q)$ всех ограниченных на Q функций (или в K-пространстве всех функций R^Q).

Таким образом, границу Шоке можно отождествить с множеством функции в $l_\infty(Q)$, обращающихся в нуль вне $\mathrm{Ch}(H)$, или, иными словами, с наибольшим проектором Pr в $l_\infty(Q)$, сужение которого на C_Q максимально в том смысле, что любой положительный оператор из C_Q в $l_\infty(Q)$, мажорирующий этот проектор на конусе H, совпадает с Pr. Разумеется, что при таком взгляде на границу Шоке изучению подлежат, конечно аддитивные меры. Иными словами, возникает вопрос: как устроены положительные функционалы на $l_\infty(Q)$, сужения на C_Q которых максимальны в упорядочении $\succ_H$? Такие функционалы называют *надмаксимальными мерами.*

Рассмотрим положительный функционал μ на $l_\infty(Q)$ и пусть μ^r — *регуляризация* μ, т. е. любой положительный функционал, являющийся распространением на $l_\infty(Q)$ регулярной борелевской меры, порожденной мерой Радона $\mu | C_Q$ — сужением функционала μ на пространство C_Q. Очевидно, что для всякого компакта Q' в Q справедливо неравенство $\mu(Q' \leqslant \mu^r(Q')$. Таким образом, надмаксимальные меры устроены не хуже максимальных, т. е. обращаются в нуль на компактах типа G_δ, не задевающих границу Шоке. Более того, поскольку ясно, что каждая максимальная мера Радона порождается (как сужение на C_Q) некоторой надмаксимальной мерой, то теоремы Шоке — Бишопа — де Лю в классической формулировке и формулировке, использующей надмаксимальные меры, равносильны. Важно подчеркнуть, что последняя формулировка использует только внутренние свойства тройки $(H, C_Q, l_\infty(Q))$.

В качестве второго примера вновь рассмотрим компактное топологическое пространство Q и обозначим через S конус ограниченных полунепрерывных сверху функций на Q. Пусть $[S]$ — векторная решетка, составленная из разностей таких функций. Очевидно, что для каждой функции $f \in [S]$ справедливо тождество $f(x) = \mathrm{co}_S f(x)$ для всех $x \in Q$. Как говорят в таких случаях (см. [31]), конус S является супремальным генератором пространства $[S]$ относительно K-пространства $l_\infty(Q)$. В известном смысле, этот факт желательно трактовать как совпадение Q и границы Шоке конуса S. Такого положения, разумеется, нетрудно добиться, используя $l_\infty(Q)$ в качестве «пробного» K-пространства (в том же смысле, что и в предыдущем примере). Отметим, однако, что поскольку ясно, что максимальные положительные функционалы на $[S]$ суть в точности регулярные борелевские меры на Q, то граница Шоке, понимаемая как компакт Q, не несет существенной информации о максимальных мерах. Последнюю трудность можно обойти, изменив внешнее K-пространство.

Именно, пространство $[S]$ по теореме Крейнов — Какутани можно реализовать как плотное подпространство пространства непрерывных функций на некотором компакте $\beta_0(Q)$ — это так называемый *борелевский компакт*, т. е. множество крайних точек положительной части шара сопряженного пространства $[S]'$ с топологией[1] $\sigma([S]', [S])$. Рассмотрим теперь конус S, как реализованный в $C_{\beta_0(Q)}$. Очевидно, что S является адаптированным (в частности, условие разделения точек выполнено ввиду соотношения $\overline{[S]} = C_{\beta_0(Q)}$). При этом граница Шоке рассматриваемого конуса, за исключением тривиальных случаев, не совпадает с компактом $\beta_0(Q)$, например, потому, что сосредоточенные на ней меры максимальны, т. е. отождествляются с регулярными борелевскими мерами на Q. Более того, все регулярные меры обращаются в нуль на компактах типа G_δ, не задевающих границу Шоке, построенную в борелевском компакте, иначе, в полной булевской алгебре подмножеств $\beta_0(Q)$.

Эти примеры, принадлежащие в своей основе Шоке, показывают, что в общую ситуацию следует включить возможность варьирования пробной булевской алгеброй, кроме того, необходимо рассматривать операторы, определенные на пробном K-пространстве и снижаемые до максимальных операторов на исходном упорядоченном векторном пространстве.

Теперь уже можно описать основную исследуемую в теории Шоке ситуацию.

Рассмотрим упорядоченное векторное пространство X и конус H в X. Пусть, далее, Z и Y — некоторые K-пространства. Фиксируем положительный линейный оператор $T_0 : X \longrightarrow Z$. Пространство Z — это *пробное* K-пространство, а T_0 — отображение, задающее связь про-

[1] Как обычно (см. [63]), если X, Y — векторные пространства в двойственности, то $\sigma(X, Y)$ и $\sigma(Y, X)$ — *слабые топологии* в X и Y соответственно.

странств X и Z. Изучению подлежат операторы, определенные на Z, которые с помощью T_0 превращаются в максимальные.

Иными словами, рассматривается коммутативная диаграмма подъема

$$\begin{tikzcd} H \subset X \arrow[r, "T_0"] \arrow[dr, "\tilde{T}"'] & Z \arrow[d, "T"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

где $\tilde{T}$ — максимальный оператор в упорядоченности, порожденной конусом H.

Основная задача — дать характеристику ядер операторов T в терминах булевской алгебры проекторов на компоненты Z.

Для анализа этой задачи будут развиты все основные средства теории Шоке в K-пространствах: декомпозиция, принципы максимума и выметания, симплексы и операторы Дирихле и т. д. Следует отметить, что результаты, получающиеся в описанной общей постановке, содержат новую информацию даже в классических случаях допустимых подпространств пространств непрерывных функций. Существенно, что этого удается достигнуть за счет привлечения более широкого набора конусов и булевских алгебр, а не только за счет технического (хотя и необходимого) перехода к операторам, действующим в произвольные K-пространства. Именно в связи с последним обстоятельством разбираемые конструкции детализируются для пространств C_Q.

III.1.2. В этом пункте мы дадим ответ на следующий вопрос. Если X — это некоторая векторная решетка, H — конус в X и $P(H)$ — наименьшая верхняя решетка, натянутая на H, то как связаны операторы, положительные на конусе $P(H)$, с операторами, положительными на H?

Отметим здесь лишь следующее обстоятельство (основанное на одной геометрической модели рассматриваемой ситуации, полное понимание которой для нужд дальнейшего изложения не является необходимым), указывающее на нетривиальный характер поставленного вопроса. Конус $P(H)$ можно естественным способом трактовать, как множество многогранников, получающихся из H. Известно, что в ряде ситуаций такие многогранники аппроксимируют все выпуклые множества. К сожалению, большего об устройстве выпуклых множеств, как правило, сказать нельзя. Действительно, рассмотрим следующий важный пример.

Пусть $\mathfrak{V}_n$ — множество выпуклых компактов в пространстве $\mathbf{R}^n$, реализованное с помощью канонической двойственности Минковского в пространстве C_{Z_n}, где Z_n — единичная евклидова сфера. Иными словами, отождествив выпуклый компакт $\mathfrak{X}\in\mathfrak{V}_n$ со следом его *опорной функции* $P_{\mathfrak{X}}$ на сферу направлений Z_n, будем считать $\mathfrak{V}_n$ конусом в C_{Z_n}. Таким образом, $\mathfrak{V}_n$ — это конус следов сублинейных функционалов над $\mathbf{R}^n$ на множество Z_n. Фактор $\mathfrak{V}_n/\mathbf{R}^n$ по равенству с точностью до параллельного переноса локально компактен в силу теоремы Арцела — Асколи (которая в указанной редакции в теории поверхностей носит название *теоремы Бляшке о выборе*). Отсюда по известной теореме Кли следует, что у конуса $\mathfrak{V}_n/\mathbf{R}^n$ есть компактное основание Q_n. Таким основанием, например, служит множество (классов) поверхностей единичной интегральной ширины. Хорошо известно, что при $n=2$ граница Шоке пространства аффинных функций — множество крайних точек Q_n — состоит из (классов) треугольников, включая вырожденные. Иными словами, положительность линейного функционала на элементах Q_n равносильна его положительности на треугольниках. Однако при $n\geqslant 3$ по теореме Шепарда [29] граница Шилова компакта Q_n совпадает с Q_n, иначе говоря, в Q_n плотны крайние точки. Таким образом, уже при $n\geqslant 3$ вопрос о положительности функционала на Q_n не редуцируется к случаю элементов решетки фиксированной длины.

Итак, мы приходим к задаче изучения неравенств вида

$$S(h_1\vee\ldots\vee h_m)\geqslant T(h_1\vee\ldots\vee h_m), \tag{1}$$

где $h_i\in H$ и S, T — положительные линейные операторы. Требуемое описание может быть получено на основе теории выпуклых операторов, действующих в K-пространства, изложенной нами в предыдущей главе.

Пусть X — некоторая векторная решетка и

$$X^m = \underbrace{X \times \ldots \times X}_{m}$$

— соответствующая степень X. Рассмотрим оператор $\Delta : X \longrightarrow X^m$ диагонального вложения X в X^m, т. е. $\Delta : x \longrightarrow (x, \ldots, x)$. Положим далее $\varepsilon : x \longrightarrow x_1 \vee \ldots \vee x_m$, где $x = (x_1, \ldots, x_m)$ — элемент X^m. Таким образом, ε — это (след) канонического сублинейного оператора, рассмотренного нами ранее.

Пусть теперь Y — некоторое K-пространство и $S \in L^+(X, Y)$ — положительный линейный оператор. Оператор $S^\vee : X^m \longrightarrow Y$, определенный соотношением $S^\vee = S \circ \varepsilon$, называется *сверхразбиением оператора* S.

I. *Сверхразбиение* $S^\vee$ *оператора* S *является возрастающим сублинейным оператором.*

На языке сверхразбиений соотношение (1) означает, что оператор $S^\vee$ мажорирует $T^\vee$ на конусе H^m. Последнее неравенство, очевидно, порождает неравенство для субдифференциалов сверхразбиений. Эти субдифференциалы фактически уже были вычислены. Конкретизируем соответствующие результаты.

Оператор $S^\wedge \in L^+(X^m, Y)$ называется *разбиением оператора* $S \in L^+(X, Y)$, если коммутативна следующая диаграмма

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\Delta"'] \arrow[dr, "S"] & \\ X^m \arrow[rr, "S^\wedge"] & & Y \end{tikzcd}$$

Отметим, что разбиения оператора S существуют, при этом, вообще говоря, таких разбиений много. Все они полностью определяются сверхразбиением оператора S. Именно, имеет место следующее очевидное предложение.

II. *Линейный оператор* $A : X^m \longrightarrow Y$ *входит в* $\partial(S^\vee)$ *в том и только в том случае, если* A — *разбиение* S.

Отметим полезные факты, вытекающие из приведенного предложения.

III. *Для каждого* $x \in X^m$ *существует разбиение* $S^\wedge$ *оператора* S *такое, что* $S^\vee x = S^\wedge x$.

IV. *Имеет место представление*

$$S^\vee x = \sup\{S^\wedge x : S^\wedge \text{ — разбиение } S\}.$$

V. *Пусть* x_1, x_2 — *положительные дизъюнктные элементы в* X *и* f — *положительный линейный функционал* *на X. Существуют положительные функционалы $f_1, f_2 \in X^r$ такие, что*

$$f_1+f_2=f;\ f_1(x_1)=f_2(x_2)=0.$$

Действительно, рассмотрим $f^\vee : X^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ — сверхразбиение функционала f и найдем разбиение $(f_1, f_2) : X^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ функционала f, удовлетворяющее условию $(f_1, f_2)(x_2, x_1)=f^\vee(x_2, x_1)$. Существование такого разбиения обеспечивает предложение IV.

Имеем

$$f_1(x_2)+f_2(x_1)=(f_1, f_2)(x_2, x_1)=f(x_1 \vee x_2)=$$
$$=f(x_1+x_2)=f_1(x_1)+f_2(x_2)+f_1(x_2)+f_2(x_1).$$

Откуда вытекает требуемое равенство $f_1(x_1)+f_2(x_2)=0$.

Замечание 1. Предложение V называют *леммой Крейна*. Здесь же уместно отметить, что по сути дела предложение IV является двойственной формой теоремы Рисса — Канторовича (см. **I.3.4.**). Действительно, если исходная векторная решетка вложена с сохранением т. в. г. конечных множеств во второе (r)-сопряженное K-пространство, то представление сверхразбиения функционала, полученное в предложении IV, совпадает со стандартным представлением верхней грани конечного числа форм — элементов исходной векторной решетки.

Установим теперь основной результат текущего пункта.

Теорема декомпозиции. *Пусть X — векторная решетка, а Y — некоторое K-пространство и S, T — операторы из $L^+(X, Y)$. Неравенство $S^\vee h \geqslant T^\vee h$ имеет место для всякого h из конуса H в X^m в том и только в том случае, если для любого разбиения $T^\wedge$ оператора T найдется разбиение $S^\wedge$ оператора S такое, что $S^\wedge h \geqslant T^\wedge h$ для $h \in H$.*

Доказательство. Достаточность. Имеем в виду предложения IV

$$S^\vee h=\sup_{S^\wedge} S^\wedge h \geqslant \sup_{T^\wedge} T^\wedge h=T^\vee h.$$

Необходимость. Пусть $T^\wedge$ — разбиение T. По предложению II выполняется $S^\vee h \geqslant T^\vee h \geqslant T^\wedge h$. Таким образом, имеем включение $T^\wedge \in \partial(S_H^\vee)$. По лемме Мазура — Орлича справедливо равенство $\partial(S_H^\vee)=\partial(S^\vee)+$ $+\partial(\delta_Y(H))$. Осталось вновь воспользоваться предложением II.

В заключение этого пункта приведем несколько представляющих самостоятельный интерес примеров применения теоремы декомпозиции. Метод рассуждений здесь вполне типичный, поэтому в дальнейшем аналогичные доказательства будут проводиться весьма сжато.

Рассмотрим задачу монотонного продолжения с подрешеток[2].

VI. *Пусть X_0 — векторная подрешетка некоторой векторной решетки X и T — регулярный оператор, действующий из X в некоторое K-пространство Y. Если сужение $T|_{X_0}$ входит в $L^+(X_0, Y)$, то существует положительное линейное продолжение оператора T с X_0 на X.*

Действительно, для всякого $x_0\in X_0$ выполняется соотношение

$$T^+x_0 = T|_{X_0}x_0 + T^-x_0.$$

Таким образом, для $x_1, x_2\in X_0$ справедлива оценка

$$T^+(x_1\vee x_2)\geqslant T|_{X_0}x_1 + T^-x_2.$$

Значит, по теореме декомпозиции найдется разбиение оператора T^+, мажорирующее разбиение

$$(x_1, x_2)\to T|_{X_0}x_1 + T^-x_2$$

на конусе $X_0\times X_0$. Отсюда и вытекает требуемое утверждение.

VII. *Пусть X_0 — замкнутая векторная подрешетка банаховой решетки X. Любой положительный линейный функционал на X_0 допускает продолжение на X с сохранением положительности.*

Действительно, поскольку X_0 с индуцированными структурами также является векторной решеткой, то положительный функционал на X_0 ограничен, а значит, по теореме Хана — Банаха допускает ограниченное продол-

---

[2] Напомним, что *подрешеткой* называют конечно-правильное подпространство векторной решетки (см. I.3.1).

жение на X. Существование положительного продолжения теперь обеспечивает предложение VI.

VIII. *Пусть X_0 — правильное дополняемое в регулярной топологии подпространство K-пространства X, тогда X_0 монотонно дополняемо (т. е. служит образом пространства X при некотором положительном идемпотентном отображении).*

Рассмотрим теперь задачу о строении подрешеток в дискретных K-пространствах. Именно, пусть X — некоторый фундамент пространства $\mathbf{R}^Q$ и X^o — это (o)-*сопряженное пространство*, т. е. пространство разностей положительных (o)-непрерывных функционалов на X.

IX. *Каждая замкнутая в топологии $\sigma(X, X^o)$ векторная подрешетка X_0 пространства X представляет собой пересечение гиперплоскостей вида*

$$\{f \in X : \alpha f(x) = \beta f(y)\},$$

где α, $\beta \in \mathbf{R}^+$ и x, $y \in Q$.

Положим

$$X_0^* = \{\mu \in X^0 : \mu(h) = 0 \quad (h \in X_0)\};$$

$$X_0^{\mathrm{dis}} = \{\alpha\varepsilon_x - \alpha\varepsilon_y : \alpha,\ \beta \in R^+,\ x, y \in Q;\ \alpha\varepsilon_x - \beta\varepsilon_y \in X_0^*\},$$

где ε_x, как обычно, мера Дирака $\varepsilon_x : f \longrightarrow f(x)$.

Для доказательства следует проверить, что для любого элемента $h_0 \in X^+$, удовлетворяющего «двухточечным соотношениям» $\mu(h_0) = 0$ для всех $\mu \in X_0^{\mathrm{dis}}$, справедливо $\nu(h_0) = 0$ для $\nu \in X_0^*$.

Рассмотрим сначала функционал $\nu \in X_0^*$, имеющий вид

$$\nu = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varepsilon_{x_k} - \varepsilon_x,$$

где x, x_1, ..., $x_n \in Q$ и α_1 ..., $\alpha_n \in \mathbf{R}^+$. Поскольку подпространство X_0 замкнуто относительно операции $\wedge$, то, применяя теорему декомпозиции, для разбиения

$$(h_1, \ldots, h_n) \rightarrow \alpha_1\varepsilon_{x_1}(h_1) + \ldots + \alpha_n\varepsilon_{x_n}(h_n)$$

функционала $\nu+\varepsilon_x$ найдем разбиение

$$(h_1, \ldots, h_n) \longrightarrow \nu_1(h_1)+\ldots+\nu_n(h_n)$$

функционала ε_x такое, что $\alpha_k\varepsilon_{x_k} - \nu_k \in X_0^*$ для $k=1, \ldots$ $\ldots, n$. Так как элемент ε_x дискретен, то $\alpha_k\varepsilon_{x_k}-\nu_k\in X_0^{\mathrm{dis}}$ и, следовательно,

$$\nu(h_0) = \sum_{k=1}^{n} \left(\alpha_k\varepsilon_{x_k} - \nu_k\right)(h_0) = 0.$$

Предположим теперь, что функционал ν имеет вид $\nu=\mu-\varepsilon_x$, где $\mu\geqslant 0$. Возьмем функционал $\mu'\in(\mathbf{R}^Q)^r$ так, чтобы $0\leqslant\mu'\leqslant\mu$. По теореме декомпозиции для μ' найдется число $1\geqslant\alpha(\mu')\geqslant 0$ такое, что $\mu'(h_0)-\alpha(\mu')\varepsilon_x\in$ $\in X_0^{\mathrm{dis}}$. По уже установленному имеем $\mu'(h_0)-$ $-\alpha(\mu')\varepsilon_x(h_0)=0$. Заметив, что в силу (o)-непрерывности μ выполняется

$$\mu=\sup\{\mu'\in(\mathbf{R}^Q)^r : 0\leqslant\mu'\leqslant\mu\}$$

и поскольку множество в правой части последней формулы фильтруется по возрастанию, последовательно получаем

$$\mu(h_0)=\lim_{\mu'}\mu'(h_0)=\sup_{\mu'}(\alpha(\mu')h_0(x))=(\sup_{\mu'}\alpha(\mu'))h_0(x).$$

Ввиду того, что последнее соотношение выполняется для всех положительных элементов из X_0, и так как, не нарушая общности, можно считать, что не для всех $h\in X_0$ справедливо $h(x)=0$, получаем, что $\nu(h_0)=0$.

Пусть теперь функционал ν имеет вид $\nu=\mu_1-\mu_2$, где μ_1, μ_2 положительны и $\mu_2\in(\mathbf{R}^Q)^r$. Разбивая μ_2 на точечные нагрузки и применяя теорему декомпозиции, в силу уже установленного убеждаемся в том, что $\nu(h_0)=0$.

Рассмотрим теперь общий случай: $\nu=\mu_1-\mu_2$, где μ_1, μ_2 — положительные функционалы из X^0. По теореме декомпозиции для всякого функционала $0\leqslant\mu_2'\leqslant\mu_2$, где $\mu_2'\in(R^Q)^r$, найдется функционал $0\leqslant\mu_1'\leqslant\mu_1$, для которого $\mu_1'-\mu_2'\in X_0^*$. При этом по ранее доказанному выполняется $\mu_1'(h_0)=\mu_2'(h_0)$. Значит,

$$\mu_2(h_0)=\sup\{\mu_2'(h_0):0\leqslant\mu_2'\leqslant\mu_2;\quad \mu_2'\in(\mathbf{R}^Q)^r\}\leqslant\mu_1(h_0).$$

Меняя в последнем рассуждении функционалы μ_1 и μ_2 местами, убеждаемся в равенстве $\nu(h_0)=0$, что и завершает доказательство.

Замечание 2. Попутно в силу биполярного тождества мы на самом деле показали, что X_0^* есть замкнутая в топологии $\sigma(X^0, X)$ линейная оболочка множества X_0^{dis}. Аналогичными средствами можно показать, что таким же образом дело обстоит и в пространствах непрерывных функций.

Опишем теперь пространства Гротендика в дискретных K-пространствах. Напомним, что подпространство X_0 в векторной решетке X называется *пространством Гротендика*, если для всякого конечного подмножества A в X_0 выполняется соотношение $\sup A+\inf A\in X_0$. Отметим, что любая векторная подрешетка в X, очевидно, является пространством Гротендика.

Итак, пусть по-прежнему X — фундамент в $\mathbf{R}^Q$.

X. *Каждое замкнутое в топологии $\sigma(X, X^0)$ пространство Гротендика в X есть пересечение гиперплоскостей вида*

$$\{f\in X:\alpha f(x)=\beta f(y)\},$$

где α, $\beta\in\mathbf{R}$ и x, $y\in Q$.

В соответствии со сделанным выше соглашением ограничимся лишь схемой доказательства.

Рассмотрим пространство $X\times X$ и в нем подпространство $\tilde{\Delta}(X_0)=\{(x,-x):x\in X_0\}$, где X_0 — исследуемое пространство Гротендика в X. Пусть, далее, X_1 — наименьшая замкнутая в топологии $\sigma(X\times X, X^\circ\times X^\circ)$ векторная подрешетка в $X\times X$, содержащая $\tilde{\Delta}(X_0)$. Рассмотрим элемент μ поляры X_0^* в X°. Следует проверить, что μ есть следствие двухточечных соотношений на X_0.

Поскольку функционал $(f, g)\longrightarrow\mu(f)-\mu(g)$ является элементом поляры X_1^* в $X^\circ\times X^\circ$, то этот функционал есть следствие двухточечных соотношений с положительными коэффициентами, справедливых на $\widetilde{\Delta}(X_0)$. Последний факт отмечен в замечании 2. Для завершения доказательства достаточно сослаться на то обстоятельство, что $X \times X$ — фундамент $\mathbf{R}^Q \times \mathbf{R}^Q$.

Замечание 3. Аналогичными средствами можно получить описание пространств Гротендика и в пространствах непрерывных функций.

III.1.3. В этом пункте собраны основные сведения о максимальных операторах. Здесь же мы установим центральный результат теории Шоке — теорему о том, что максимальные операторы воспроизводят компоненту в K-пространстве регулярных операторов.

Пусть X, Y — упорядоченные векторные пространства. Конус H в X наводит упорядоченность (точнее, предпорядок) $\succ_H$ в множестве положительных операторов $L^+(X, Y)$. Именно,

$$T_1 \succ_H T_2 \Leftrightarrow T_1 h \geqslant T_2 h \quad (h \in H).$$

Интервал $[T, \to)$ называется *положительным ростком оператора* T на конусе H и обозначается $\operatorname{Spr}(T, H)$. Таким образом,

$$\operatorname{Spr}(T, H) = \{T' \in L^+(X, Y) : T' \succ_H T\}.$$

Оператор $T \in L^+(X, Y)$ называется *максимальным* (относительно конуса H), если $\operatorname{Spr}(T, H) = \{T\}$.

Если пространство X является векторной решеткой, а $P(H)$ — наименьшая верхняя решетка, натянутая на H, то упорядоченность $\succ_{P(H)}$ называют *упорядоченностью Шоке*, порожденной конусом H. Как правило, в теории Шоке рассматривают именно эту упорядоченность.

Условимся в дальнейшем без дополнительных оговорок рассматривать только *регулярно упорядоченные векторные пространства* X. Именно, мы будем считать, что X и X^r приведены в двойственность канонической формой $(x, f) \to f(x)$ и что конус X^+ положительных элементов в X замкнут в некоторой (а значит, и в любой) топологии, согласованной с этой двойственностью.

Замечание 1. Уместно отметить, что подпространство регулярно упорядоченного пространства регулярно упорядочено. Если, кроме того, X — регулярно упорядоченная векторная решетка, то она архимедова и ее K-пополнение $\widehat{X}$ также регулярно упорядочено. Проверим только последнее из этих утверждений. Действительно, пусть $z \in \widehat{X}^+$ и $z > 0$. Найдется элемент $z' \in X$ такой, что $z \geqslant z' > 0$ (мы для определенности считаем, что $X \subset \widehat{X}$). Пусть $f \in (X^r)^+$ и $f(z') > 0$. Функционал f допускает положительное распространение $\widehat{f}$ на $\widehat{X}$ и, значит, $\widehat{f}(z) \geqslant f(z') > 0$. Пусть теперь $z_1 - z_2 \neq 0$ и $f(z_1 - z_2) = 0$ для всякой формы $f \in \widehat{X}^r$. Возьмем элемент $x' \in X$ такой, что $x' \leqslant z_1 - z_2$. Тогда для $f' \in (X^r)^+$ выполняется $f'(x') \leqslant 0$ и, значит, $x' \leqslant 0$. Таким образом,

$$z_1 - z_2 = \sup\{x' \in X : x' \leqslant z_1 - z_2\} \leqslant 0,$$

т. е. $z_1 - z_2 \leqslant 0$. Значит, по ранее установленному $z_1 = z_2$. Осталось проверить, что положительный конус в $\widehat{X}$ замкнут. Итак, пусть $f(z) \geqslant 0$ для всех $f \in (\widehat{X}^r)^+$. Для элемента $x' \in X$ такого, что $x' \geqslant z$, выполняется $f'(x') \geqslant 0$ для всех $f' \in (X^r)^+$, т. е. $x' \geqslant 0$. Поскольку $z = \inf\{x' \in X : x' \geqslant z\}$, то $z \geqslant 0$.

В дальнейшем нам неоднократно понадобится следующий признак конусов, на которых существуют максимальные операторы[3].

I. *На конусе H существуют максимальные операторы со значениями в некотором (а тогда и в любом) регулярно упорядоченном K-пространстве в том и только в том случае, если верхние границы элементов H заполняют плотное множество в X.*

Проверим сначала необходимость сформулированного признака. Пусть X^+ — положительный конус в X и $z \in X \setminus \overline{H + X^+}$. По теореме отделимости найдется функционал f такой, что $f(z) \neq 0$ и, кроме того, $f(u) \geqslant 0$ для $u \in H + X^+$. Ясно, что $f \in (X^r)^+$ и, помимо этого, $f(h) \geqslant 0$ для всех $h \in H$. Пусть оператор $T \in L^+(X, Z)$, где Z — некоторое K-пространство, является максимальным. Возьмем $y > 0$, $y \in Z$ и положим $T' = T + f \otimes y$, где $f \otimes y$ — тензорное произведение, $f \otimes y : x \to f(x) y$. Имеем, что $T' \in L^+(X, Z)$. При этом $T'h = Th + f(h) y \geqslant Th$ для всех $h \in H$, т. е. $T' \succ_H T$. Таким образом, $f \otimes y = 0$, откуда вытекает, что $f = 0$. Получаем противоречие.

---

[3] Начиная с этого места, нам удобно исключать из рассмотрения пространство, состоящее из одного — нулевого — элемента.

Установим теперь достаточность приведенного условия. Итак, пусть $\overline{H+X^+}=X$ и Z — некоторое K-пространство. Рассмотрим нулевой оператор $T\in L^+(X, Z)$. Пусть $T'\in \mathrm{Spr}(T, H)$ и для некоторого $x\in X$ выполняется $T'x\neq 0$. В силу регулярности упорядочения в Z существует функционал $f\in Z^r$ такой, что $f\geqslant 0$ и, кроме того, $f(T'x)\neq 0$. Рассмотрим функционал $(T')^*f$, действующий по правилу $(T')^*f: x\longrightarrow f(T'x)$. Ясно, что $(T')^*f\in \in (X^r)^+$. При этом $(T')^*f(h)\geqslant 0$ для всех $h\in H$. Следовательно, $(T')^*f(x)\geqslant 0$ для всех $x\in X$, т. е. $(T')^*f=0$. Последнее означает, что $T'=T$. Предложение доказано.

II. *Пусть конус H коинициален X, т. е. $H+X^+=X$. Тогда на H существуют максимальные операторы.*

В связи с предложением II особый интерес представляют следующие утверждения.

III. *Если в векторной решетке X имеется конечный коинициальный конус, то X является решеткой ограниченных элементов.*

Действительно, если конечный конус H натянут на образующие $h_1, \ldots, h_m$ (т. е. является конической оболочкой указанного конечного множества), то в качестве сильной единицы в X можно взять элемент $\mathbf{1}=-(h_1\wedge \ldots \ldots \wedge h_m)$.

В самом деле, так как H коинициален X, то для элемента $x\in X$ найдутся положительные числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ такие, что

$$x\geqslant \sum_{k=1}^{m} \alpha_k h_k \geqslant \left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_k\right)(h_1\wedge \ldots \wedge h_m) = -\left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_k\right)\mathbf{1}.$$

В частности, применяя полученное соотношение к элементу $-x$, найдем $\beta\in \mathbf{R}^+$, для которого $x\leqslant \beta\mathbf{1}$. Стандартным образом проверяется, что $\mathbf{1}$ — единица в X. В самом деле, пусть $x_0>0$. Найдем число $\beta>1$ такое, что $x_0<\beta\mathbf{1}$. Тогда $0<x_0/\beta<x_0$. Кроме того, $x_0/\beta<\mathbf{1}$, так что справедлива оценка $x_0\wedge\mathbf{1}\geqslant x_0/\beta>0$. Итак, $\mathbf{1}$ — единица в X, ограничивающая каждый элемент.

IV. *Если конус положительных элементов в упорядоченном векторном пространстве X содержит внутреннюю точку, то существование максимальных операторов на конусе H в X равносильно коинициальности этого кону-*

са. При этом конус $-H$ содержит внутреннюю точку конуса положительных элементов.

Пусть f — максимальный функционал на H (как мы увидим чуть ниже, этот случай является общим). Если в H нет внутренних точек конуса $-X^+$, то по теореме отделимости в H^* найдется не нулевой положительный функционал g. Таким образом, $f+g \in \operatorname{Spr}(f, H)$, что противоречит максимальности f. Если же s — внутренняя точка конуса $-X^+$, лежащая в H, и $x \in X$, то найдутся $y \in -X^+$ и число $1 \geqslant \alpha > 0$, для которых $\alpha x + (1-\alpha) y = s$. Итак, выполняется $x \geqslant s/\alpha$, что и означает коинициальность H.

V. *Пусть T — максимальный оператор и $0 \leqslant T' \leqslant T$. Тогда оператор T' также максимален.*

Пусть $T'' \in \operatorname{Spr}(T', H)$. Определим оператор $T_1 = T + T'' - T'$. Ясно, что $T_1 \in L^+(X, Y)$. Кроме того, для любого элемента $h \in H$ выполняется $T_1 h = Th + (T'' - T')h \geqslant Th$. Следовательно, $T_1 = T$, а значит, и $T'' = T'$.

Замечание 2. Предложения I и V показывают, что на конусе существуют максимальные операторы в том и только в том случае, если на этом конусе максимален нулевой функционал.

Пусть теперь X является векторной решеткой, а Y — некоторое K-пространство. Оператор $T \in L^r(X, Y)$ называется *H-граничным*, если его модуль $|T|$ максимален относительно конуса H. Операторы, являющиеся $P(H)$-граничными, называются *граничными в смысле Шоке.*

С помощью теоремы декомпозиции устанавливается следующее важное свойство граничных операторов.

Теорема 1 (1.III). *Граничные в смысле Шоке операторы заполняют компоненту $\mathfrak{B}(Y)$ в K-пространстве регулярных операторов $L^r(X, Y)$.*

Доказательство. Проверим сначала, что сумма $T_1 + T_2$ двух граничных в смысле Шоке операторов также является граничным оператором. Положим $T = |T_1| + |T_2|$ и пусть $S \in \operatorname{Spr}(T, P(H))$. Рассмотрим конус $P(H) \times P(H)$ в пространстве $X \times X$. Пусть $h = (h_1, h_2)$ — элемент $P(H) \times P(H)$. Имеем

$$S^{\vee} h = S \circ \varepsilon h = S(h_1 \vee h_2) \geqslant T(h_1 \vee h_2) = T^{\vee} h.$$

Очевидно, что оператор $(x_1, x_2) \to |T_1| x_1 + |T_2| x_2$ является разбиением оператора T. Значит, по теореме декомпозиции найдется разбиение $S^\wedge$ оператора S такое, что $S^\wedge$ мажорирует указанное разбиение T на конусе $P(H)\times P(H)$. Пусть

$$S_1: x \to S^\wedge(x, 0);\ S_2: x \to S^\wedge(0, x).$$

Очевидно, что $S_1 \in \operatorname{Spr}(|T_1|, P(H))$ и $S_2 \in \operatorname{Spr}(|T_2|, P(H))$. Итак,

$$Sx = S^\wedge\Delta x = S_1x + S_2x = |T_1|x + |T_2|x = Tx,$$

т. е. $|T_1| + |T_2|$ — граничный в смысле Шоке оператор. Поскольку выполняется соотношение $|T_1+T_2| \leqslant |T_1| + |T_2|$, то по предложению V оператор T_1+T_2 является граничным.

Таким образом, множество $\mathfrak{B}(Y)$ — векторное подпространство в $L^r(X, Y)$ и, кроме того, в силу предложения V это подпространство нормально содержится в $L^r(X, Y)$. Осталось установить правильность $\mathfrak{B}(Y)$.

Пусть U — ограниченное сверху множество в $\mathfrak{B}(Y)$ и $T_0 = \sup U$. Не нарушая общности, можно считать, что все операторы из U максимальны в упорядоченности Шоке.

Возьмем оператор $T \in U$. Тогда для оператора S из $\operatorname{Spr}(T_0, P(H))$ имеем, что $Sh \geqslant (T_0h - Th) + Th$ для $h \in P(H)$. По теореме декомпозиции для разбиения $(x_1, x_2) \to (T_0 - T)x_1 + Tx_2$ оператора T_0 найдется разбиение $S^\wedge$ оператора S такое, что $S^\wedge(0, h) \geqslant Th$ для $h \in P(H)$. Так как T — максимальный оператор, то $S^\wedge(0, x) = Tx$ для $x \in X^+$. Следовательно, $Sx \geqslant S^\wedge(0, x) = Tx$. Таким образом, $Sz \geqslant T_0z$ для всех элементов $z \in P(H) + X^+$. Для каждого положительного функционала $f \in Y^r$ выполняется $f(Sz - T_0z) \geqslant 0$ для $z \in P(H) + X^+$. В силу предложения II конус $P(H) + X^+$ плотен в X, кроме того, пространство Y является регулярно упорядоченным, значит, имеет место равенство $S = T_0$.

Итак, установлено, что оператор T_0 максимален в упорядоченности Шоке и, следовательно, $\mathfrak{B}(Y)$ является компонентой. Теорема доказана полностью.

Замечание 3. Не следует полагать, что наименьшая компонента, содержащая множество граничных относительно H операторов, обязана в общем случае совпадать с $\mathfrak{B}(Y)$. Действительно, пусть $X = C_{[0, 1]}$ и H — конус вогнутых квадратных трехчленов. Нетрудно проверить, что H-максимальные функционалы на X суть в точности меры вида $\alpha\varepsilon_x$, где $\alpha \geqslant 0$ и $x \in [0, 1]$. В то же время $\overline{P(H)} = X$, откуда следует, что все меры являются граничными в смысле Шоке.

Опишем теперь специальные свойства максимальных операторов на коинициальном конусе H. Определим для $x \in X$ *опорное множество* соотношением $U_x = U_{x,H} = \{h \in \in H : h \leqslant x\}$ и с каждым оператором $T \in L^+(X, Y)$ свяжем суперлинейный оператор

$$q_{H,T} : x \to \sup T[U_{x,H}].$$

VI. *Оператор T' входит в множество* $\operatorname{Spr}(T, H)$ *в том и только в том случае, если* $-T' \in \partial(-q_{H,T})$.

Действительно, если $-T' \in \partial(-q_{H,T})$, то в силу возрастания $q_{H,T}$ оператор T' положителен. Кроме того, для $h \in H$ выполняется $T'h \geqslant q_{H,T}(h) = Th$, т. е. $T' \succ_H T$.

Если же $T' \in \operatorname{Spr}(T, H)$, то для $x \in X$ и $h \in U_x$ имеем $T'x \geqslant T'h \geqslant Th$, иными словами.

$$T'x \geqslant \sup\{Th : h \in U_x\} = q_{H,T}(x).$$

VII. *Имеет место представление*

$$q_{H,T}(x) = \inf\{T'x : T' \in \operatorname{Spr}(T, H)\}.$$

VIII. *Оператор T является максимальным относительно конуса H в том и только в том случае, если* $q_{H,T} = T$.

Предположим теперь, что X — подпространство K-пространства Z и $E : X \longrightarrow Z$ — оператор тождественного вложения. Оператор $q_{H,E}$ называется *H-выпуклой оболочкой* и обозначается символом co_H.

IX. *Если сужение $T|_X$ оператора $T \in L^+(Z, Y)$ максимально, то $Tx = T\mathrm{co}_H x$ для всех элементов $x \in X$.*

В самом деле, в силу предложения VIII выполняется

$$Tx = q_{H,T|_X}(x) \leqslant T\,\mathrm{co}_H x \leqslant Tx,$$

поскольку $\mathrm{co}_H x = \sup_Z U_x$.

X. *Если X является векторной подрешеткой в Z, оператор T удовлетворяет условию $Tx = T\mathrm{co}_H x$ для всех $x \in X$ и, кроме того, (o)-непрерывен, то сужение $T|_X$ максимально в упорядочении Шоке.*

По условию выполняется $Tx = T\mathrm{co}_H x = T\mathrm{co}_{P(H)} x$, причем множество $U_{x,\,P(H)}$ фильтруется по возрастанию. Значит,

$$Tx = \sup\{Th : h \in U_{x,P(H)}\} = q_{P(H),T|_X}(x)$$

и по предложению VIII $\mathrm{Spr}(T,\, P(H)) = \{T\}$.

Замечание 4. Локальная характеристика максимальности оператора не в коинициальном случае, вообще говоря, неизвестна. В то же время полезным оказывается следующее утверждение, которым мы уже на самом деле пользовались:

$$(T \text{— максимален}) \Leftrightarrow \mathrm{Spr}(T,\, H) \subset \mathrm{Spr}(T,\, X^+).$$

Действительно, нуждается в проверке только импликация $\Leftarrow$. Если $T' \succ_H T$, то по условию $T' - T \in L^+(X,\, Y)$ и, значит, выполняется $T' \succ_{H+X^+} T$. Таким образом, $T' = T$ ибо $\overline{H + X^+} = X$.

Здесь же уместно отметить, что существенным для теоремы 1 и остальных результатов, изложенных в данном параграфе, является именно конструкция сохранения неравенств. Точнее, если H — верхняя решетка и H_1 — некоторый другой конус в X, то можно рассмотреть так называемые *согласованные операторы* (относительно пары конусов H, H_1), устроенные по аналогии с граничными в смысле Шоке операторами. Именно, оператор $T \in L^r(X,\, Y)$ называется согласованным, если $\mathrm{Spr}(|T|,\, H) \subset \mathrm{Spr}(|T|,\, H_1)$. Ниже мы установим, что согласованные операторы заполняют компоненту в K-пространстве регулярных операторов, устроенную по аналогии с компонентой граничных в смысле Шоке операторов. Сейчас же ограничимся одним примером.

Если Q — компактное пространство, а βQ — компактификация Чеха — Стоуна Q с дискретной топологией, конусом H служит конус ограниченных полунепрерывных сверху на Q функций (в исходной топологии), а конусом H_1 — конус положительных ограниченных полунепрерывных снизу функций, то согласованными в соответствующем смысле положительными функционалами на пространстве $l_\infty(Q)$, изоморфном $C_{\beta Q}$, являются регуляризации конечно аддитивных мер на Q. Операторный аналог этого утверждения мы разберем в следующем параграфе.

В заключение текущего пункта приведем процедуру вложения, раскрывающую связь коинициального и общего случаев.

Итак, пусть X — регулярно упорядоченная векторная решетка и Y — регулярно упорядоченное K-пространство. Вложим X в K-пространство $L^r(L^r(X, Y), Y)$ посредством сопоставления элементу $x \in X$ оператора $i(x): T \to Tx$. В силу регулярности упорядочения в рассматриваемых пространствах отображение $x \to i(x)$ монотонно и имеет монотонное обратное. Более того, это отображение сохраняет т. в. г. конечных множеств.

Действительно, в силу теоремы Рисса — Канторовича и предложения III из **1.2** для оператора T из $L^+(X, Y)$ и элементов $x_1, x_2 \in X^+$ выполняются соотношения

$$
\begin{gathered}
i(x_1) \vee i(x_2)(T) = \\
= \sup\{i(x_1)(T') + i(x_2)(T''): T' + T'' = T; \\
T', T'' \in L^+(X, Y)\} = \sup\{T^\wedge(x_1, x_2): T^\wedge \in L^+(X \times X, Y); \\
T^\wedge \Delta = T\} = T^\vee(x_1, x_2) = T(x_1 \vee x_2) = i(x_1 \vee x_2)(T).
\end{gathered}
$$

С помощью указанного стандартного вложения можно достаточно наглядно охарактеризовать максимальные операторы на верхних решетках.

XI. *Пусть конус H является верхней решеткой в X и $T \in L^+(L^r(X, Y), Y)$. Отображение*

$$\mathrm{env}_H(T): T' \to \inf\{T(T'): T >_H T\},$$

действующее из $L^+(X, Y)$ в Y^+, возрастает и аддитивно.

Следует установить только аддитивность указанного отображения, ибо его монотонность очевидна.

В силу теоремы декомпозиции соотношение

$$\mathrm{Spr}(T_1 + T_2, H) = \mathrm{Spr}(T_1, H) + \mathrm{Spr}(T_2, H)$$

выполняется для любых операторов $T_1, T_2 \in L^+(X, Y)$. Таким образом,

$$\operatorname{env}_H(T)(T_1+T_2)=\inf\{T(T_1')+T(T_2'): T_1' \succ_H T_1,$$
$$T_2' \succ_H T_2\}=\inf\{T(T_1'): T_1' \succ_H T_1\}+$$
$$+\inf\{T(T_2'): T_2' \succ_H T_2\}=\operatorname{env}_H(T)(T_1)+\operatorname{env}_H(T)(T_2).$$

Распространим теперь естественным способом отображение $\operatorname{env}_H(T)$ на пространство $L^r(X, Y)$. Полученный элемент пространства $L^r(L^r(X, Y), Y)$ называется *оболочкой* T и обозначается тем же символом $\operatorname{env}_H(T)$. Для удобства будем считать, что $L^r(X, Y) \subset \subset L^r(L^r(L^r(X, Y), Y), Y)$.

XII. *Отображение*

$$\operatorname{env}_H: L^+(L^r(X, Y), Y) \to L^+(L^r(X, Y), Y)$$

является оператором замыкания в смысле Мура. При этом оператор $T \in L^+(X, Y)$ является H-максимальным в том и только в том случае, если $T(x-\operatorname{env}_H(x))=0$ для всех $x \in X^+$.

Соотношения

$$\operatorname{env}_H(T) \leqslant T;$$
$$T_1 \leqslant T_2 \Rightarrow \operatorname{env}_H(T_1) \leqslant \operatorname{env}_H(T_2)$$

очевидны. Таким образом, следует проверить только последнее свойство из определения оператора замыкания в смысле Мура — идемпотентность оператора env_H. Имеем

$$\operatorname{env}_H(\operatorname{env}_H(T))(T_1)=\inf\{\operatorname{env}_H(T)(T'): T' \succ_H T_1\}=$$
$$=\inf_{T' \succ_H T_1} \inf_{T'' \succ_H T'} T(T'')=\inf_{T' \succ_H T_1} T(T')=\operatorname{env}_H(T)(T_1)$$

для всякого оператора $T_1 \in L^+(X, Y)$, что и требуется.

Если T — некоторый H-максимальный оператор, то справедливость соотношения $T(x-\operatorname{env}_H(x))=0$ $(x \in X^+)$ следует из определений. Если же, наоборот, известно, что для оператора T выполнены указанные соотношения и $T' \succ_H T$, то для каждого элемента $x \in X^+$ имеет место оценка

$$T'x \geqslant \mathrm{env}_H(x)(T) = T\mathrm{env}_H(x) = Tx,$$

иными словами, $T' \in \mathrm{Spr}(T, X^+)$. Последнее по замечанию 4 означает максимальность оператора T. Предложение доказано полностью.

Таким образом, указанная конструкция вложения и в некоинициальном случае позволяет работать с максимальными операторами на верхних решетках в терминах предложений VIII и IX — на языке выпуклых оболочек.

III.1.4. Результаты предыдущего пункта показывают, что граничные в смысле Шоке операторы заполняют компоненту в K-пространстве регулярных операторов. *Основная задача теории Шоке — дать описание этой компоненты.* Идея метода границ состоит в том, чтобы заменить условие «оператор максимален» условием «оператор обращается в нуль вне некоторой границы». В известном смысле, речь идет об аппроксимации компоненты граничных операторов компонентами простейшего типа — компонентами, порожденными проекторами в области определения операторов. Вообще говоря, даже если область определения рассматриваемых операторов есть K-пространство, таких компонент недостаточно для описания всей базы пространства операторов. Однако, как мы увидим ниже, компоненты граничных операторов обладают существенной спецификой — существует естественная граница, вне которой максимальные операторы анормальны и, значит, дизъюнктны ко всем (o)-непрерывным операторам. Оказывается, что именно эта компонента и играет роль множества крайних точек в классическом выпуклом анализе.

Итак, в соответствии с пунктом **1.1.** рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} H \subset X \arrow[r, "T_0"] \arrow[dr, "TT_0"'] & Z \arrow[d, "T"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

Здесь H — конус в упорядоченном векторном пространстве X, а оператор T_0 входит в $L^+(X, Z)$. Пространства Z и Y являются K-пространствами.

Оператор $T \in L^+(Z, Y)$ называется *T_0-максимальным*, если суперпозиция TT_0 максимальна относительно H. Если T_0 является вложением X в Z, то T_0-максимальные операторы называются *надмаксимальными*. Множество T_0-максимальных операторов со значениями в Y обозначается $\mathfrak{M}(T_0, Y)$. Символом $\mathfrak{M}(T_0)$ обозначается множество всех T_0-максимальных операторов, определенных на Z, т. е.

$$\mathfrak{M}(T_0) = \bigcup_Y \mathfrak{M}(T_0, Y),$$

где объединение берется по всем регулярно упорядоченным K-пространствам Y. В случае надмаксимальных операторов используются обозначения $\mathfrak{M}(Z, Y)$ и $\mathfrak{M}(Z)$.

Отметим, что если H — верхняя решетка в векторной решетке X, то T_0-максимальные операторы естественным образом воспроизводят компоненту.

I. *Если H — верхняя решетка, то*

$$\mathfrak{M}(T_0, Y)^{dd} = \{T \in L^r(Z, Y) : |T| T_0 \in \mathfrak{B}(Y)\},$$

где d — отношение дизъюнктности в $L^r(Z, Y)$ (см. **I.2.5**).

В силу теоремы 1 множество A, стоящее в правой части последней формулы, является нормальным подпространством в $L^r(Z, Y)$. Пусть (T_α) — ограниченное фильтрующееся по возрастанию семейство положительных операторов из A. Проверим, что $\sup\limits_\alpha T_\alpha \in A$. Действительно, для любого элемента $x \in X^+$ выполняется

$$(\sup_\alpha T_\alpha) T_0 x = \sup_\alpha (T_\alpha T_0 x) = (\sup_\alpha T_\alpha T_0) x.$$

По теореме 1 оператор $\sup\limits_\alpha T_\alpha T_0$ максимален в упорядоченности Шоке. Таким образом, подпространство A является правильным и, следовательно, компонентой. Так как, кроме того, очевидно, что $A \subset \mathfrak{M}(T_0, Y)^{dd}$, то предложение доказано.

Проектором Шоке называется верхняя грань в булевской алгебре проекторов на компоненты Z множества T_0-максимальных проекторов. Этот проектор обозначается $P_{\mathrm{Ch}(H,T_0)}$ или $P_{\mathrm{Ch}(T_0)}$. Компоненту, на которую осуществляет проектирование $P_{\mathrm{Ch}(H,T_0)}$, называют *компонентой Шоке* или *границей Шоке* и обозначают $\mathrm{Ch}(H, T_0)$ или $\mathrm{Ch}(T_0)$. В случае, если T_0 — вложение, используются обозначения P_{Ch} и $\mathrm{Ch}(H, X, Z)$.

Предложение I показывает, что если H — верхняя решетка в векторной решетке X, то проектор Шоке является T_0-максимальным. Действительно, супремум любого семейства проекторов, вычисленный в соответствующей булевской алгебре, совпадает с верхней гранью этого семейства в K-пространстве регулярных операторов.

Оказывается, что и в произвольном случае также справедлива

Теорема 2 (1.III). *Проектор Шоке является T_0-максимальным.*

Доказательство. Следует проверить, что

$$\operatorname{Spr}(P_{\mathrm{Ch}(T_0)}T_0, H) = \{P_{\mathrm{Ch}(T_0)}T_0\}.$$

Итак, пусть $A \in L^+(X, Z)$ и $A \succ_H P_{\mathrm{Ch}(T_0)}T_0$. Для произвольного проектора $P \in \mathfrak{M}(T_0, Z)$ по определению имеем

$$PAh \geqslant PP_{\mathrm{Ch}(T_0)}T_0h = PT_0h \quad (h \in H).$$

Следовательно, $PA = PT_0$. В частности, для $x \in X^+$ выполняется

$$Ax \geqslant P_{\mathrm{Ch}(T_0)}Ax = \Big(\sup_{P\in\mathfrak{M}(T_0,Z)} P\Big)Ax = \sup_{P\in\mathfrak{M}(T_0,Z)} PAx =$$
$$= \sup_{P\in\mathfrak{M}(T_0,Z)} PT_0x = \Big(\sup_{P\in\mathfrak{M}(T_0,Z)} P\Big)T_0x = P_{\mathrm{Ch}(T_0)}T_0x.$$

Таким образом, для всех $z \in H + X^+$ справедлива оценка

$$(A - P_{\mathrm{Ch}(T_0)}T_0)z \geqslant 0.$$

Доказательство завершается ссылкой на предложение I пункта **1.3.**

Замечание 1. Пусть $H \subset X \subset Z$. Справедливы соотношения (для отношения дизъюнктности d в Z)

$$H^d = X^d \subset \mathrm{Ch}(H, X, Z).$$

Действительно, пусть P_{H^d} — проектор на H^d. Очевидно, что $P_{H^d}h = 0$ для всех $h \in H$. Поскольку оператор P_{X^d} надмаксимален в силу надмаксимальности нулевого проектора, имеем $X \subset H^{dd}$. С другой стороны, $H^d \supset X^d \supset H^{ddd} = H^d$. Таким образом, P_{H^d} — надмаксимальный проектор. Следовательно, $H^d \subset \mathrm{Ch}(H, X, Z)$.

Замечание 2. Границами Шоке могут служить, вообще говоря, произвольные компоненты. Действительно, пусть Z — некоторое K-пространство, P — проектор в Z. Положим $H = \{z \in Z : Pz \leqslant 0\}$. Выполняется $\mathrm{Ch}(H, Z, Z) = \mathrm{Ker}(P)$, т. е. $P_{\mathrm{Ch}} = P^d$. В самом деле, не нулевой проектор, меньший P, очевидно, не является максимальным. В то же время для всякого элемента $z \in Z^+$ выполняется $z \geqslant P^d z$ и $P^d z \in H$, что и означает максимальность P^d.

Замечание 3. Пусть помимо конуса H, пространств X и Z и оператора $T_0 \in L^+(X, Z)$ задан оператор $T_1 \in L^+(Z, Z_1)$, где Z_1 — некоторое K-пространство. В этом случае в пространстве Z_1 выделяются две естественные границы, расположенные следующим образом:

$$\mathrm{Ch}(H, T_1 T_0) \subset \mathrm{Ch}(T_0[H], T_1|_{T_0[X]}).$$

Правая компонента называется *относительной границей Шоке*. Исследование таких границ начато Гроссманом в [17].

Перейдем к описанию ядер максимальных операторов. Итак, пусть $T \in L^+(Z, Y)$ и $\mathrm{Ker}(T)$ — его *ядро*. Как обычно, определим *нулевую решетку* $N(T)$ оператора T следующим соотношением: $N(T) = \{z \in Z : |z| \in \mathrm{Ker}(T)\}$. Положим

$$\mathrm{Ker} = \bigcap_{T \in \mathfrak{M}(T_0)} \mathrm{Ker}(T);$$

$$N = \bigcap_{T \in \mathfrak{M}(T_0)} N(T).$$

Очевидно, что имеет место включение $N \subset \mathrm{Ker}$.

Установим теперь основной результат текущего параграфа.

Теорема 3 (1.III). *Сужение произвольного T_0-максимального оператора на дизъюнктное дополнение границы Шоке анормально. При этом* $\mathrm{Ch}(H, T_0)^d = N^{dd}$.

Доказательство. Справедливость теоремы можно установить в два этапа. Сначала проверим, что

$$N = \mathrm{Ker},$$

а затем, что наименьшей компонентой, содержащей общую часть ядер T_0-максимальных операторов, является дизъюнктное дополнение границы Шоке, т. е. равенство

$$\mathrm{Ker}^d = \mathrm{Ch}(T_0).$$

Из этих двух соотношений, в частности, следует, что $N^d = \mathrm{Ch}(T_0)$. Так как N, очевидно, нормальное подпространство компоненты $\mathrm{Ch}(T_0)^d$ и, кроме того, $N^d \cap \cap \mathrm{Ch}(T_0)^d = \{0\}$, то N — фундамент дополнения границы Шоке. Таким образом, доказательство будет завершено.

Имеем $N \subset \mathrm{Ker}$. Установим обратное включение. Для этого возьмем элемент $x \in \mathrm{Ker}$ и оператор $T \in \mathfrak{M}(T_0)$. В силу предложения III пункта **1.1** найдется разбиение $T^\wedge$ оператора T такое, что

$$T^\wedge(x, -x) = T^\vee(x, -x) = T(x \vee (-x)) = T|x|.$$

Операторы $z \to T^\wedge(z, 0)$ и $z \to T^\wedge(0, z)$ по предложению V пункта **1.3** являются максимальными и, следовательно, выполняются равенства $T^\wedge(x, 0) = T^\wedge(0, x) = 0$. Значит, $T|x| = 0$, что в силу произвольности T и означает вхождение $x \in N$.

Установим теперь равенство $\mathrm{Ker}^d = \mathrm{Ch}(T_0)$. По теореме 2 справедливо вхождение $P_{\mathrm{Ch}(T_0)} \in \mathfrak{M}(T_0)$. Значит, $\mathrm{Ker} \subset \mathrm{Ch}(T_0)^d$ и, следовательно, $\mathrm{Ch}(T_0) = \mathrm{Ch}(T_0)^{dd} \subset \subset \mathrm{Ker}^d$. Для доказательства обратного включения необходимо (и, разумеется, достаточно) проверить T_0-максимальность проектора P_{Ker^d} на компоненту Ker^d.

Итак, пусть $A \in L^+(X, Z)$ и $Ah \geqslant P_{\mathrm{Ker}^d} T_0 h$ для всех $h \in H$. Для каждого оператора $T \in \mathfrak{M}(T_0)$ имеем

$$TAh \geqslant TP_{\mathrm{Ker}^d} T_0 h \quad (h \in H).$$

По предложению V из **1.3** оператор TP_{Ker^d} входит в $\mathfrak{M}(T_0)$. Следовательно, $TA = TP_{\mathrm{Ker}^d} T_0$. Таким образом, для $x \in X^+$ выполняется соотношение

$$Ax - P_{\mathrm{Ker}^d} T_0 x \in \mathrm{Ker}.$$

Иными словами, имеет место равенство

$$P_{\mathrm{Ker}^d}\left(Ax - P_{\mathrm{Ker}^d} T_0 x\right) = 0.$$

Помимо этого, справедлива оценка

$$Ax \geqslant P_{\mathrm{Ker}^d} Ax = P_{\mathrm{Ker}^d} P_{\mathrm{Ker}^d} T_0 x = P_{\mathrm{Ker}^d} T_0 x.$$

Значит, окончательно $(A - P_{\mathrm{Ker}^d} T_0) z \geqslant 0$ для всех $z \in H + X^+$.

Итак, P_{Ker^d} является T_0-максимальным оператором, т. е. $\mathrm{Ch}(T_0) \supset \mathrm{Ker}^d \supset \mathrm{Ch}(T_0)$. Следовательно, $\mathrm{Ker}^{dd} = \mathrm{Ch}(T_0)^d$, что и завершает доказательство.

Замечание 4. Теорему 3 часто называют *теоремой об анормальности.*

Замечание 5. Тройка (H, X, Z), где конус H коинициален Z, называется *стандартной* или *обладающей CE-свойством*, если $X = \overline{P(H) - P(H)}$ и $\mathrm{co}_H[-P(H)] \subset X$. В случае стандартной тройки границу Шоке оказывается возможным подсчитать по ядрам максимальных операторов. Именно,

$$\mathrm{Ch}(H, X, Z) = (N \cap X)^d.$$

Действительно, включение $(N \cap X)^{dd} \subset N^{dd} = \mathrm{Ch}^d$ вытекает из теоремы об анормальности. Кроме того, если рассмотреть множество

$$D = \{x - \mathrm{co}_H x : x \in -P(H)\}$$

то $D \subset N \cap X$, причем проектор P_{D^d} является надмаксимальным (ср. предложение X пункта **1.3**). Таким образом, выполняется $\mathrm{Ch} \supset D^d \supset (N \cap X)^d \supset \mathrm{Ch}$.

Приведем полезные следствия теоремы об анормальности.

II. *Компонента $N(T)^d$ существенной положительности любого (o)-непрерывного T_0-максимального оператора T содержится в границе Шоке.*

Действительно, по теореме 3 $N(T) \supset \mathrm{Ch}(H, T_0)^d$. Таким образом,

$$N(T)^d \subset \mathrm{Ch}(H, T_0)^{dd} = \mathrm{Ch}(H, T_0).$$

III. *Эквивалентны следующие утверждения*:

(1) Ker *является компонентой*;

(2) $\mathrm{Ker} = \mathrm{Ch}(H, T_0)^d$;

(3) *для всякого* $T \in \mathfrak{M}(T_0)$ *выполняется* $TP_{\mathrm{Ch}(T_0)^d} = 0$.

В силу теоремы 3 $\mathrm{Ch}(H, T_0)^d = \mathrm{Ker}^{dd} = \mathrm{Ker}$, что доказывает импликацию (1) $\Rightarrow$ (2). Импликация (2) $\Rightarrow$ (3) является очевидной. Проверим (3) $\Rightarrow$ (1).

Если $z \in \mathrm{Ch}(H, T_0)^d$, то для $T \in \mathfrak{M}(T_0)$ выполняется

$$T|z| = TP_{\mathrm{Ch}(T_0)^d}|z| = 0.$$

Следовательно, $\mathrm{Ch}(H, T_0)^d \subset N = \mathrm{Ker} \subset \mathrm{Ch}(H, T_0)^d$, что и завершает доказательство.

Остановимся теперь несколько подробнее на случае коинициального конуса. В этой ситуации при анализе основной диаграммы выделяются три компоненты, изучаемые в теории Шоке:

$$\mathfrak{B}(T_0, Y) = \{T \in L^r(Z, Y) : |T| T_0 \in \mathfrak{B}(Y)\};$$

$$\mathfrak{B}_s(T_0, Y) = \{T \in L^r(Z, Y) : |T| P_{\mathrm{Ch}(H, T_0)^d} = 0\};$$

$$\mathfrak{B}_p(T_0, Y) = \{T \in L^r(Z, Y) : N(|T|) \supset D_{T_0}\},$$

где H — коинициальная верхняя решетка и

$$D_{T_0} = \{T_0 x - q_{H, T_0}(x) : x \in X\}.$$

Тот факт, что $\mathfrak{B}(T_0, Y)$ — компонента, установлен предложением I. Соответствующие свойства для $\mathfrak{B}_s(T_0, Y)$ и $\mathfrak{B}_p(T_0, Y)$ проверяются непосредственно.

Компонента $\mathfrak{B}(T_0, Y)$ называется компонентой T_0-*граничных* операторов, $\mathfrak{B}_s(T_0, Y)$ — компонентой T_0-*сосредоточенных* операторов и, наконец, компонента $\mathfrak{B}_p(T_0, Y)$ — компонентой T_0-*псевдограничных* операторов.

Отметим очевидные включения

$$\mathfrak{B}(T_0, Y) \subset \mathfrak{B}_p(T_0, Y); \; \mathfrak{B}_s(T_0, Y) \subset \mathfrak{B}_p(T_0, Y).$$

Несложно убедиться, что в общем случае, кроме выписанных включений, ничего о расположении указанных компонент сказать нельзя. То же относится и к расположению компонент T_0-сосредоточенных и T_0-граничных операторов (ср. с предложением III). Важно отметить, что указанные различия связаны исключительно с анормальными операторами.

Именно, если $L^0(Z, Y)$ — компонента (o)-непрерывных операторов в пространстве $L^r(Z, Y)$, то $\mathfrak{B}^o(T_0, Y)$, $\mathfrak{B}_s^o(T_0, Y)$ и $\mathfrak{B}_p^o(T_0, Y)$ — соответствующие компоненты T_0-граничных, T_0-сосредоточенных и T_0-псевдограничных (o)-непрерывных операторов.

Теорема 4 (1.III). *Имеют место равенства*

$$\mathfrak{B}^o(T_0, Y) = \mathfrak{B}_s^o(T_0, Y) = \mathfrak{B}_p^o(T_0, Y).$$

Доказательство. Достаточно проверить включения

$$\mathfrak{B}_p^o(T_0, Y) \subset \mathfrak{B}^o(T_0, Y); \quad \mathfrak{B}_p^o(T_0, Y) \subset \mathfrak{B}_s^o(T_0, Y).$$

Пусть $T \in \mathfrak{B}_p^o(T_0, Y)$. Не нарушая общности, будем считать, что $T \in L^+(Z, Y)$. Для $x \in X^+$ имеем соотношения

$$TT_0x = Tq_{H,T_0}(x) = T\sup\{T_0h : h \in U_{x,H}\} = \\ = \sup\{TT_0h : h \in U_{x,H}\} = q_{H,TT_0}(x),$$

поскольку множество $\{T_0h : h \in U_{x,H}\}$ фильтруется по возрастанию (ибо H является верхней решеткой). Таким образом, по предложению X пункта **1.3** оператор T является T_0-максимальным. Значит, $T \in \mathfrak{B}^o(T_0, Y)$. Поскольку T, кроме того, (o)-непрерывен, то нулевая решетка $N(T)$ является компонентой. По предложению II $N(T)^d \subset \mathrm{Ch}(T_0)$ и, значит, что $N(T) = N(T)^{dd} = \mathrm{Ch}(T_0)^d$, т. е. $T \in \mathfrak{B}_s^o(T_0, Y)$. Теорема доказана полностью.

Приведем несколько полезных утверждений, следующих из теоремы 4.

IV. *Линейный (o)-непрерывный оператор является T_0-максимальным в упорядоченности Шоке, порожденной коинициальным конусом, в том и только в том случае, если компонента его существенной положительности содержится в границе Шоке.*

V. *Пусть H — коинициальная верхняя решетка. Оператор T_0 является максимальным в том и только в том случае, если $\mathfrak{B}^0(T_0, Y) = L^0(Z, Y)$ для всякого K-пространства Y.*

Действительно, по доказанному оператор T_0 является максимальным в том и только в том случае, если $\mathrm{Ch}(H, T_0) = Z$.

Уточним теперь представление компоненты Шоке, полученное в теореме об анормальности. Обозначим через Ker^o общую часть ядер (o)-непрерывных T_0-максимальных операторов, определенных на Z, а через N^0 — общую часть соответствующих нулевых решеток.

VI. *Для произвольного конуса H справедливо соотношение*

$$N^0 = \mathrm{Ker}^o = \mathrm{Ch}(H, T_0)^d.$$

Равенство $N^0 = \mathrm{Ker}^o$ следует из ранее установленного соотношения $N = \mathrm{Ker}$. Кроме того, по теореме 3

$$\mathrm{Ch}(H, T_0) = N^d \supset N^{0d} \supset \mathrm{Ch}(H, T_0)^{dd} = \mathrm{Ch}(H, T_0).$$

Так как множество N^o, очевидно, является компонентой, то выполняется $N^0 = N^{odd} = \mathrm{Ch}(H, T_0)^d$.

В качестве иллюстрации приведем теперь одну из возможных комбинаций полученных результатов, устанавливающую справедливость «идеальной» теоремы Шоке в пространствах измеримых функций.

VII. *Пусть положительные функционалы на пробном K-пространстве Z являются (o)-непрерывными.*

(1) *Каждый оператор из $\mathfrak{M}(T_0)$ обращается в нуль на дизъюнктном дополнении границы Шоке.*

(2) *Если H — коинициальная X верхняя решетка, то $T \in \mathfrak{M}(T_0)$ в том и только в том случае, если справедливо равенство $TP_{\mathrm{Ch}(H,T_0)^d} = \mathbf{0}$.*

Пусть $T \in L^+(Z, Y)$. Возьмем фильтрующееся по убыванию семейство положительных элементов (z_α) в Z такое, что $z_\alpha \downarrow \mathbf{0}$. Положим $y = \inf_\alpha Tz_\alpha$ и возьмем положительный функционал f на пространстве Y. По условию функционал $T^*f : z \longrightarrow f(Tz)$ является (o)-непрерывным и, следовательно,

$$0 = \inf_\alpha T^*f(z_\alpha) \geqslant f(\inf_\alpha Tz_\alpha) = f(y) \geqslant 0.$$

Итак, $f(y) = 0$ для всех $f \in Y^r$, что в силу регулярности упорядочения в Y означает, что $y=0$. Таким образом, оператор T является (o)-непрерывным. Доказательство завершается ссылками на теорему 4 и предложение VI.

Замечание 6. При применении теоремы об анормальности и ее модификаций полезно иметь в виду, что в ряде ситуаций изучение произвольных максимальных операторов сводится к (o)-непрерывному случаю. В некотором смысле так обстоит дело в скалярной теории Шоке. Поясним это обстоятельство детальнее.

Пусть X является архимедовой векторной решеткой ограниченных элементов. Будем считать пространство X вложенным (с сохранением т. в. г. конечных множеств) в K-пространство X^{rr} — второе (r)-сопряженное к X пространство. Как видно, регулярные функционалы на X^r являются (o)-непрерывными, причем X^r совпадает с пространством X^{rr}, т. е. является (o)-сопряженным к X^{rr}. Таким образом, *положительный функционал* μ *на* X *максимален в упорядоченности Шоке, наводимой конусом* H *в* X, *в том и только в том случае, если компонента существенной положительности* μ *содержится в компоненте Шоке* $\mathrm{Ch}(H, X, X^{rr})$, иными словами, если μ сосредоточен на границе Шоке. Уместно здесь же подчеркнуть, что приведенное утверждение есть по сути дела следствие теоремы 1.

В заключение текущего параграфа приведем несколько примеров границ Шоке.

1. В случае адаптированного конуса H (см. пункт **1.1**) проектор P_{Ch} для тройки $(H, C_Q, l_\infty(Q))$ есть оператор сужения функции на множество $\mathrm{Ch}(H)$. Отметим, что если Q — выпуклый компакт в локально выпуклом пространстве, а H — конус непрерывных выпуклых функций, то $\mathrm{Ch}(H)$ есть множество крайних точек Q.

2. Пусть A — локально компактный упорядочивающий конус в локально выпуклом пространстве B. Пусть, далее, Z является K-пространством положительно однородных функций на A и H — подпространство, составленное из следов непрерывных функционалов над B на множество A. Если теперь X — пространство непрерывных функций из Z, то граница Шоке $\mathrm{Ch}(H, X, Z)$, как видно, отождествляется с множеством крайних лучей конуса A.

3. Пусть H — подпространство в C_Q, являющееся векторной решеткой в индуцированном отношении порядка.

Рассмотрим компоненту

$$\mathrm{Ch}(H, \overline{P(H)-P(H)}, l_\infty(Q)).$$

Можно показать, что эта компонента отождествляется с так называемой *решеточной границей* Жеба и Семадени, т. е. с множеством

$$\{x \in Q: (f \vee_H g)\,\tilde{(x)} = (f \vee g)\,(x) \text{ для всех } f, g \in H\}.$$

4. Если H — коинициальный конус в подпространстве X некоторого K-пространства Z, то H является *супремальным генератором X относительно Z* (т. е. для всякого $x \in X$ выполняется $x = \sup_Z\{h \in H : h \leqslant x\}$) в том и только в том случае, если $\mathrm{Ch}(H, X, Z) = Z$.

5. Пусть G — ограниченная область в $\mathbf{R}^n$ с компактной границей Γ и H_Γ — подпространство C_Γ, составленное из следов на Γ функций, непрерывных в $\bar{G} = G \cup \Gamma$ и гармонических в G. Пусть H_G — пространство ограниченных и гармонических в G функций. Пространство H_G является нормальным подпространством K-пространства разностей положительных гармонических функций и, следовательно, само является K-пространством. Обозначим через $T_0: C_\Gamma \longrightarrow H_G$ оператор обобщенного решения задачи Дирихле, т. е. единственное положительное продолжение естественного вложения H_Γ в H_G на пространство C_Γ. Существование такого продолжения обеспечивается теоремой Канторовича, а единственность — теоремой Келдыша [32]. Таким образом, $\mathrm{Ch}(H_\Gamma, T_0) = H_G$ и в то же время граница $\mathrm{Ch}(H_\Gamma, C_\Gamma, l_\infty(\Gamma))$ отождествляется с множеством регулярных точек на границе области Γ.

Детальный анализ ситуаций, описанных в примерах 4 и 5, имеется в [11], [31]. Дальнейшие примеры границ Шоке приводятся в следующем параграфе.

§ 2. СИМПЛИЦИАЛЬНЫЕ КОНУСЫ

В этом параграфе мы изложим один из самых ярких и важных в прикладном отношении фрагментов теории Шоке — теорию симплексов Шоке и Бауэра.

III.2.1. Результаты предыдущего параграфа показывают, что максимальные операторы устроены достаточно просто — они обращаются в нуль на одном фундаменте дополнения границы Шоке. Возникает вопрос: нельзя ли воспользоваться этим положением для анализа свойств произвольного оператора? Разумеется, что здесь речь может идти только о свойствах, связанных с исходным конусом H. Основная задача теории Шоке в этом направлении заимствована из теории потенциала — это проблема оценки сверху значений оператора на конусе H с помощью некоторого максимального оператора. Указанная проблема известна под названием *задачи о выметании* (имеется в виду «выметание значений на границу»). Таким образом, речь идет о характеристике случаев, когда в ростке каждого оператора имеются максимальные операторы. В таких случаях говорят, что задача о выметании разрешима или что выметания существуют.

В этом параграфе, носящем отчасти технический характер, обсуждаются простейшие свойства выметаний и связанных с ними шиловских проекторов. Затем будет изучен наиболее важный для приложений случай единственности выметания. В последнем случае множество $\mathfrak{M}$ максимальных операторов и конус $L^+(X, Y)$ особенно просто связаны друг с другом. Точнее, $L^+(X, Y)$ расслаивается на попарно непересекающиеся ростки максимальных операторов, т. е.

$$L^+(X, Y) = \bigcup_{T \in \mathfrak{M}} \operatorname{Spr}(T, -H).$$

При этом, как и следовало ожидать, случай единственности выметания оказывается тесно связанным с разрешимостью задачи Дирихле на соответствующих границах Шоке.

Следующее важное утверждение известно под названием *леммы о выметании.*

I. *Пусть конус H коинициален X и $T \in L^+(X, Y)$, где Y — некоторое K-пространство. Существует оператор $T_1 \in \operatorname{Spr}(T, H)$, для которого выполняется соотношение*

$$\operatorname{Spr}(T_1, H) = \operatorname{Spr}(T_1, H - H).$$

Пусть S — множество сужений операторов из $\operatorname{Spr}(T, H)$ на пространство $H - H$. Сужение отношения $>_H$ на S является, очевидно, отношением порядка.

Возьмем произвольную цепь Λ в S. Цепь Λ, естественно, фильтруется по возрастанию. Рассмотрим семейство $(T'h)_{T'\in\Lambda}$, где $h\in H$. Для элемента $h'\in U_{-h,H}$ и оператора $T'\in\Lambda$ выполняется неравенство $T'h\leqslant -Th'$. Таким образом, указанное семейство возрастает и ограничено сверху. Положим

$$T_0h=(o)\text{-}\lim_{T'\in\Lambda} T'h=\sup\{T'h:T'\in\Lambda\}$$

и естественным образом распространим получившийся оператор T_0 до линейного оператора на $H-H$. Возникающий оператор положителен и в силу коинициальности $H-H$ пространству X по теореме Канторовича допускает распространение до элемента пространства $L^+(X, Y)$. Таким образом, цепь Λ ограничена сверху сужением T_0 и потому по лемме Цорна в S есть максимальный элемент, являющийся сужением на $H-H$ некоторого оператора $T_1\in \mathrm{Spr}(T, H)$. Очевидно, что оператор T_1 — искомый.

Отметим некоторые следствия леммы о выметании.

II. *Если $H-H=X$, то в ростке каждого оператора существуют максимальные операторы.*

III. *Пусть H - коинициален K-пространству Z и $X=H-H$. Тогда* $\mathrm{Ker}\cap H\cap X^+=\{0\}$.

В самом деле, пусть $h\in H\cap X^+$ и $h\neq \mathbf{0}$. Рассмотрим положительный функционал $f\in Z^r$ такой, что $f(h)>0$. По предложению II и теореме Канторовича найдется надмаксимальный функционал f_1, из ростка $\mathrm{Spr}(f|_X, H)$. Ясно, что $h\in\mathrm{Ker}(f_1)$, а потому $h\in\mathrm{Ker}$.

IV. *На конусе H существует единственный максимальный оператор со значениями в Y в том и только в том случае, если $-H\subset X^+$.*

Действительно, если $-H\subset X^+$, то нулевой оператор входит в росток $\mathrm{Spr}(T, H)$ для всякого $T\in L^+(X, Y)$, а потому только этот оператор и максимален.

Допустим теперь, что существует $h\in H$ такой, что $-h\in X^+$. Найдем функционал, разделяющий $-h$ и X^+, т. е. такой, что $f\in (Z^r)^+$ и $f(h)>0$. Положим $f\otimes y:x\longrightarrow f(x)\,y$, где $y>\mathbf{0}$ — некоторый элемент Y. По предложению II найдется максимальный оператор из ростка $\mathrm{Spr}(f\otimes y, H)$. Очевидно, что этот оператор не нулевой. Полученное противоречие завершает доказательство.

V. *Оператор T максимален в том и только в том случае, если T совпадает с $q_{H,T}$ на конусе $-H$.*

Необходимость приведенного условия содержится в предложении VIII пункта 1.3. Для доказательства достаточности рассмотрим какой-либо максимальный оператор T_1 из ростка $\mathrm{Spr}(T, H)$. Существование этого оператора обеспечено условием $\overline{H-H}=X$ и леммой о выметании. Тогда для элемента $h\in -H$ выполняется

$$T_1h\leqslant Th = q_{H,T}(h) = \sup\{Th' : h' \in U_h\}\leqslant$$
$$\leqslant\sup\{T_1h' : h' \in U_h\} = q_{H,T_1}(h) = T_1h.$$

Итак, T_1 и T совпадают на конусе $-H$, а значит, и всюду.

Выметанием $\Psi_{H,Y}$, порожденным H, называется любое отображение $L^+(X, Y)$ в множество максимальных операторов такое, что $\Psi_{H,Y}(T)\succ_H T$ для всех $T\in L^+(X, Y)$. Иными словами, выметания — это селекторы отображения

$$T\to\mathrm{Spr}(T, H)\cap\mathfrak{B}(Y)\quad (T\in L^+(X, Y)).$$

В силу леммы о выметании, если конус H является коинициальным X и $\overline{H-H}=X$, то выметания существуют. Каждое выметание связано с *формулой обращения*

$$Th\leqslant\Psi_{H,Y}(T)h\quad (h\in H).$$

В формуле обращения для всех $h\in H$ выполняется равенство в том и только в том случае, если T — максимальный оператор.

Выметания связаны с рядом проблем теории Шоке и, в частности, с принципом максимума. Введем в связи с этим два типа проекторов.

Пусть H — конус в K-пространстве Z. Проектор P в Z называется *шиловским*, если как только $Ph\leqslant\mathbf{0}$, то $h\leqslant\mathbf{0}$ (для элемента $h\in H$). Если из $Ph=\mathbf{0}$ вытекает, что $h\leqslant\mathbf{0}$, то P называется *слабым шиловским проектором* (относительно конуса H). Приведем нетривиальный пример шиловского проектора.

Рассмотрим архимедову векторную решетку ограниченных элементов X, вложенную во второе (r)-сопряженное пространство X^{rr}, и коинициальный конус H в X, удовлетворяющий условию $X=\overline{H-H}$. Оказывается, что *проектор* P_{Ch} *на границу Шоке* $\mathrm{Ch}^{\cdot}(H, X, X^{rr})$ *является шиловским*. В самом деле, пусть для некоторого элемента $h\in H$ выполняется $P_{\mathrm{Ch}}h\leqslant \mathbf{0}$. Достаточно проверить (см. замечание 6 пункта **1.4**), что для всякого положительного (o)-непрерывного функционала μ на X^{rr} имеет место неравенство $\mu(h)\leqslant 0$. Пространство X^{rro}, как уже отмечалось, совпадает с X^r. Значит, по лемме о выметании найдется максимальный функционал μ_1 из ростка μ на конусе H. Мера μ_1 сосредоточена на границе Шоке. Таким образом, выполняется $\mu(h)\leqslant\mu_1(h)=\mu_1(P_{\mathrm{Ch}}h)\leqslant 0$, т. е. P_{Ch} — шиловский проектор.

Применим теперь полученный результат для случая, когда $X=C_0$. В такой ситуации множество $A\subset Q$ называется *границей конуса* H, если соответствующий проектор P_A в пространстве $l_\infty(Q)$ является шиловским. Из приведенного рассуждения следует, что если конус H коинициален X и таков, что $X=\overline{H-H}$, то у H есть наименьшая замкнутая граница — *граница Шилова конуса* H. При этом граница Шилова является наименьшим замкнутым множеством, на котором сосредоточены все H-максимальные функционалы. Действительно, граница Шилова определяется наименьшей широко замкнутой компонентой в X^r, содержащей компоненту граничных в смысле Шоке мер $\mathfrak{B}(\mathbf{R})$.

Установим полезные общие связи шиловских проекторов с границей Шоке.

VI. *Пусть конус H коинициален K-пространству Z и $X=\overline{H-H}$. Пусть далее P — проектор в Z.*

(1) *Если P^d — шиловский проектор, то* $P[X]\cap X\subset\mathrm{Ker}$.

(2) *Если* $P[X]\cap X\subset\mathrm{Ker}$, *то P^d — слабый шиловский проектор.*

Пусть $x\in X$ и $Px=x$. Для каждого элемента $h\in U_x$ имеем $P^dh\leqslant P^dx=\mathbf{0}$. Следовательно, $h\leqslant\mathbf{0}$ и по предложению VIII из **1.3** для вского надмаксимального оператора T выполняется $Tx\leqslant\mathbf{0}$. Значит, $x\in\mathrm{Ker}$ и (1) установлено.

Проверим (2). По формуле обращения имеем

$$h\leqslant\Psi_{H,Z}(P|_X)h+P^dh.$$

Если $P^dh=\mathbf{0}$, то $h\in P[X]\cap X$, т. е. $\Psi_{H,Z}(P|_X)h\leqslant\mathbf{0}$ и, следовательно, P^d является слабым шиловским проектором.

В качестве примера сформулируем результат об эквивалентности принципа максимума и «идеальной» теоремы Шоке в K-пространствах.

VII. *Пусть H — коинициальный конус в K-пространстве Z и*

$$Z=\overline{\mathrm{co}_H[Z]-\mathrm{co}_H[Z]}.$$

Эквивалентны следующие утверждения:

(1) *Проектор Шоке является шиловским.*

(2) *Оператор T максимален относительно* $\mathrm{co}_H[Z]$ *в том и только в том случае, если* $TP_{\mathrm{Ch}^d}=\mathbf{0}$.

(1) $\Rightarrow$ (2). Пусть $x\in\mathrm{co}_H[Z]$ и $P_{\mathrm{Ch}}x\leqslant\mathbf{0}$. Для $h\in U_{x,H}$ имеем $P_{\mathrm{Ch}}h\leqslant P_{\mathrm{Ch}}x\leqslant\mathbf{0}$, т. е. в силу шиловости проектора Шоке $h\leqslant\mathbf{0}$. Следовательно, $x=\mathrm{co}_Hx\leqslant\mathbf{0}$. Итак, проектор Шоке является шиловским и относительно конуса $\mathrm{co}_H[Z]$. Значит, по предложению VI $Tx=\mathbf{0}$, как только $x\in\mathrm{Ch}^d$.

Пусть теперь для оператора T выполняется $TP_{\mathrm{Ch}^d}=\mathbf{0}$.

Возьмем $T'\in\mathrm{Spr}(T,\mathrm{co}_H[Z])$. Для каждого $z\in Z$ выполняется $T'z\geqslant T'\mathrm{co}_Hz\geqslant T\mathrm{co}_Hz$ и так как

$$T(z-\mathrm{co}_Hz)=TP_{\mathrm{Ch}}(z-\mathrm{co}_Hz)=\mathbf{0}$$

в силу теоремы 1 и предложения VIII пункта **1.3**, то $T'z\geqslant Tz$. Так как элемент z произволен, отсюда следует, что T максимален относительно $\mathrm{co}_H[Z]$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Пусть $h\in H$ и $P_{\mathrm{Ch}}h\leqslant\mathbf{0}$. По формуле обращения

$$h=P_{\mathrm{Ch}}h+P_{\mathrm{Ch}^d}h\leqslant P_{\mathrm{Ch}^d}h\leqslant$$
$$\leqslant\Psi_{\mathrm{co}_H[Z],Z}\left(P_{\mathrm{Ch}^d}\right)h=\Psi_{\mathrm{co}_H[Z],Z}\left(P_{\mathrm{Ch}^d}\right)P_{\mathrm{Ch}}h\leqslant\mathbf{0},$$

т. е. P_{Ch} — шиловский проектор. Предложение доказано.

Приведем еще одну характеристику ростков, связанную с шиловскими проекторами.

Пусть H — коинициальный конус в K-пространстве Z и $T\in L^+(Z,Y)$. Для шиловского проектора P в Z положим

$$q_{H,T}(P):z\longrightarrow\sup\{Th:h\in H,\ Ph\leqslant Pz\}.$$

Заметим прежде всего, что оператор $q_{H,T}(P)$ всюду определен. Действительно, найдется элемент $h' \in H$ такой, что $-Pz \geqslant h'$. Тогда если $Ph \leqslant Pz$ для некоторого $h \in H$, то выполняется $0 \geqslant Ph - Pz \geqslant P(h+h')$ и в силу шиловости P элемент $-h'$ является верхней границей множества $\{h \in H : Ph \leqslant Pz\}$.

VIII. *Для каждого* $z \in Z$ *выполняется*

$$q_{H,T}(P)(z) = \inf\{T'z : T' \in \operatorname{Spr}(T, H),\ T'P^d = 0\}.$$

В самом деле, если $T' \succ_H T$ и $T'P^d = 0$, то для элементов $z \in Z$ и $h \in H$ таких, что $Ph \leqslant Pz$, выполняется $T'z = T'Pz \geqslant T'Ph = T'h \geqslant Th$. Значит, $-T \in \partial(-q_{H,T}(P))$. Пусть, наоборот, $T'z \geqslant q_{H,T}(P)(z)$ для $z \in Z$. Если $z = P^d z$, то для всякого $h \in H$ такого, что $Ph \leqslant Pz$, имеем неравенство $Ph \leqslant 0$. Поскольку P — шиловский проектор, то $h \leqslant 0$ и, значит, $q_{H,T}(P)(z) = 0$. Итак, $T'P^d z \geqslant 0$ для $z \in Z$, т. е. $T'P^d = 0$. Для завершения доказательства следует только заметить, что $-q_{H,T}(P)$ — сублинейный оператор.

III.2.2. В этом пункте мы займемся проблемой единственности выметания. Основной результат в этом направлении состоит в том, что свойство единственности не зависит от области значений рассматриваемых операторов и, следовательно, определяется внутренними свойствами исходного конуса.

I. *Пусть H — коинициальный воспроизводящий конус в X и Y — некоторое K-пространство. Росток* $\operatorname{Spr}(T, H)$ *оператора* $T \in L^+(X, Y)$ *фильтруется по возрастанию в упорядоченности* $\succ_H$ *в том и только в том случае, если оператор* $q_{H,T}$ *аддитивен на конусе* $-H$.

Установим сначала достаточность сформулированного условия. Пусть элементы $h_1, h_2, g_1, g_2 \in H$ таковы, что $h_1 - h_2 = g_1 - g_2$. В силу аддитивности $q_{H,T}$ на конусе $-H$ имеем

$$T_1 : h_1 - h_2 \longrightarrow q_{H,T}(-h_2) - q_{H,T}(-h_1).$$

Таким образом корректно определен линейный оператор

$$T_1 : h_1 - h_2 \longrightarrow q_{H,T}(-h_2) - q_{H,T}(-h_1).$$

Если $h_1 - h_2 \geqslant 0$, то $T_1 h_1 \geqslant T_1 h_2$ в силу возрастания оператора $q_{H,T}$. Итак, $T_1 \in L^+(X, Y)$. Пусть теперь $T' \in$

$\in \mathrm{Spr}(T, H)$. Для элементов $h \in -H$ и $h' \in U_{h,H}$ имеем $Th' \leqslant T'h' \leqslant T'h$. Следовательно, можно перейти к супремуму в левой части неравенства, что дает $T_1 h = \sup T[U_h] \leqslant T'h$. Окончательно получаем, что $T_1 \in \in \mathrm{Spr}(T, H)$.

Проверим теперь необходимость рассматриваемого условия. По лемме о выметании и в силу допущений в $\mathrm{Spr}(T, H)$ существует единственный максимальный оператор T_1. Для элемента $h \in H$ выполняется

$$T_1(-h) \leqslant T'(-h) \quad (T' \in \mathrm{Spr}(T, H)).$$

Таким образом, в силу предложений VII и VIII из **1.3**

$$q_{H,T}(-h) \leqslant T_1(-h) \leqslant \inf_{T' \in \mathrm{Spr}(T,H)} T'(-h) = q_{H,T}(-h).$$

Итак, $q_{H,T}(-h) = T_1(-h)$, что и требовалось.

Замечание 1. Предложение I часто называют *леммой о фильтрации ростка.*

В дальнейшем нам понадобится также следующее утверждение.

II. *Пусть* $T \in L^+(X, Y)$ *и выпуклое множество* U *в* X *ограничено сверху. Тогда* $\sup T[U] = \sup T[\overline{U}]$.

Пусть $z \geqslant T[U]$ и $x \in \overline{U}$. Найдется сеть (x_α) элементов U такая, что $x_\alpha \longrightarrow x$. Для всякого положительного функционала $f \in Y^r$ имеем $f(Tx_\alpha) \longrightarrow f(Tx)$, поскольку замыканиями U во всех согласованных с двойственностью топологиях служит одно и то же множество $\overline{U}$. Следовательно, $f(z) \geqslant f(Tx)$. В силу замкнутости конуса положительных элементов в Y отсюда следует, что $z \geqslant Tx$ и, значит, $\sup T[U] \geqslant \sup T[\overline{U}]$. С другой стороны, поскольку $\overline{U} \supset U$, то $\sup T[\overline{U}] \geqslant \sup T[U]$. Предложение доказано.

Конус H называется *симплициальным*, если для каждого K-пространства Y им порождается единственное выметание $\Psi_{H,Y}$ в пространстве $L^+(X, Y)$. В дальнейшем для удобства выметание обозначается символом Ψ_H, при этом, как и ранее, мы будем предполагать, что $H + X^+ = X$ и $X = \overline{H - H}$. Отметим здесь же, что на симплициальном конусе выметание возрастает в упорядочении $\succ_H$.

Теорема 5(2.III). *Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *Конус H является симплициальным.*

(2) *Для любых h_1, $h_2 \in -H$ выполняется*

$$\overline{U_{h_1,H} + U_{h_2,H} - X^+} \supset U_{h_1+h_2,H}.$$

(3) *Росток любого положительного функционала фильтруется по возрастанию.*

Доказательство. Импликация $(1) \Rightarrow (3)$ очевидна.

$(3) \Rightarrow (2)$. Пусть для некоторых h_1, $h_2 \in -H$ и $h \in U_{h_1+h_2}$ элемент h не входит в замыкание множества $U_{h_1} + U_{h_2} - X^+$. По теореме отделимости найдется функционал $f \in X^r$, для которого

$$f(h) > \sup f[U_{h_1} + U_{h_2} - X^+].$$

Ясно, что этот функционал положителен, причем

$$q_{H,f}(h_1 + h_2) \geqslant f(h) > \sup f[U_{h_1} + U_{h_2}] = \\ = q_{H,f}(h_1) + q_{H,f}(h_2).$$

Итак, оператор $q_{H,f}$ не аддитивен на конусе $-H$, что противоречит предложению I.

$(2) \Rightarrow (1)$. Пусть $T \in L^+(X, Y)$ и h_1, $h_2 \in -H$. Имеем

$$q_{H,T}(h_1 + h_2) \geqslant q_{H,T}(h_1) + q_{H,T}(h_2) = \sup T[U_{h_1} + U_{h_2}] = \\ = \sup T[U_{h_1} + U_{h_2} - X^+] = \sup T[\overline{U_{h_1} + U_{h_2} - X^+}] \geqslant \\ \geqslant \sup T[U_{h_1+h_2}] = q_{H,T}(h_1 + h_2)$$

(здесь мы воспользовались предложением II).

Таким образом, оператор $q_{H,T}$ аддитивен на $-H$ и по предложению I получаем, что H — симплициальный конус. Теорема доказана.

III. *Если симплициальный конус является верхней решеткой, то выметание — аддитивный оператор.*

Для выметания Ψ_H очевидно, что $\Psi_H(T_1) + \Psi_H(T_2) \succ_H \succ_H T_1 + T_2$. Поскольку операторы $\Psi_H(T_1)$ и $\Psi_H(T_2)$ максимальны, то по теореме I оператор $\Psi_H(T_1) + \Psi_H(T_2)$ также максимален. Следовательно,

$$\Psi_H(\Psi_H(T_1) + \Psi_H(T_2)) = \Psi_H(T_1) + \Psi_H(T_2) = \Psi_H(T_1 + T_2)$$

в силу симплициальности конуса H.

Замечание 2. Именно с последним предложением связана особая роль симплициальных верхних решеток. Однако не следует полагать, что нерешеточных симплициальных конусов не бывает. В самом деле, пусть Q — выпуклый компакт в локально выпуклом пространстве и A — подпространство аффинных функций в пространстве C_Q. Конус $-P(A)$ симплициален в указанном пространстве. Действительно, по теореме 5 достаточно проверить, что для каждой положительной меры Радона μ существует единственная мажорирующая ее в упорядоченности $\succ_{-P(A)}$ максимальная мера. Такая мера, очевидно, имеет вид $\mu(\mathbf{1})\varepsilon_{x_\mu}$, где, как обычно, $\mathbf{1}:x\longrightarrow 1$, а x_μ — это *барицентр* вероятностной меры $\mu/\mu(\mathbf{1})$, т. е. $\mu(a)=\mu(\mathbf{1})a(x_\mu)$ для всех $a\in A$.

Здесь же уместно отметить следующий факт. В описанной только что ситуации граница Шоке $\mathrm{Ch}(P(A),\ C_Q,\ l_\infty(Q))$ естественным образом порождается множеством, отвечающим пересечению совокупностей максимальных функционалов относительно конусов $P(A)$ и $-P(A)$. Последнее обстоятельство носит случайный характер. Действительно, рассмотрим конус S ограниченных полунепрерывных сверху функций на компакте Q. Будем для удобства считать Q вложенным (как множество) в борелевский компакт $\beta_0(Q)$. Нетрудно проверить, что граница Шоке $\mathrm{Ch}(S,\ C_{\beta_0(Q)},\ l_\infty(\beta_0(Q)))$ отождествляется в данной ситуации с множеством Q. В то же время компонента $\mathrm{Ch}(-S,\ C_{\beta_0(Q)},\ l_\infty(\beta_0(Q)))$ порождается, как правило, множеством в $\beta_0(Q)\setminus Q$.

Перейдем теперь к каноническому способу построения симплициальных конусов. Прежде всего, дадим определение.

Говорят, что *подпространство H* в векторной решетке *обладает свойством интерполяции Рисса*, если для любых $h_1,\ h_2,\ g_1,\ g_2\in H$ таких, что $h_1\vee h_2\leqslant g_1\wedge g_2$ найдется элемент $h\in H$, для которого $h_1\vee h_2\leqslant h\leqslant g_1\wedge g_2$.

IV. *Если H обладает свойством интерполяции Рисса, то для любых элементов $f\in P(H)$ и $g\in -P(H)$ таких, что $f\leqslant g$, найдется элемент $h\in H$, для которого $f\leqslant h\leqslant g$.*

Действительно, если $h_1\vee h_2\leqslant g_1\wedge\ldots\wedge g_n\wedge g_{n+1}$ и существует элемент $z_1\in H$ такой, что выполняется соотношение $h_1\vee h_2\leqslant z_1\leqslant g_1\wedge\ldots\wedge g_n$, то $h_1\vee h_2\leqslant z_1\wedge g_{n+1}$. Следовательно, найдется элемент $z_2\in H$, для которого справедливо $h_1\vee h_2\leqslant z_2\leqslant z_1\wedge g_{n+1}\leqslant g_1\wedge\ldots\wedge g_n\wedge g_{n+1}$.

Аналогичным образом индукция может быть проведена и по элементам решетки $P(H)$.

V. *Если коинициальное подпространство H обладает свойством интерполяции Рисса, то конус $P(H)$ симплициален в пространстве $\overline{P(H)-P(H)}$.*

Рассмотрим следующие элементы

$$f_1, f_2 \in -P(H), \quad f \in U_{f_1+f_2, P(H)}.$$

По предложению IV найдется элемент $h \in H$, для которого выполняется $f \leqslant h \leqslant f_1 + f_2$. Поскольку очевидно, $h - f_1 \in P(H)$, то существует элемент $h_2 \in H$ такой, что $h - f_1 \leqslant h_2 \leqslant f_2$. Положим $h_1 = h - h_2$. Тогда $h_1 \leqslant f_1$, $h_2 \leqslant f_2$ и, кроме того, $h_1 + h_2 = h \geqslant f$. Итак,

$$U_{f_1+f_2, P(H)} \subset U_{f_1, P(H)} + U_{f_2, P(H)} - X^+,$$

т. е. по теореме 5 конус $P(H)$ симплициален в $P(H) - -P(H)$. Поскольку подпространство H коинициально $\overline{P(H)-P(H)}$, то по теореме Канторовича любой положительный оператор, определенный на $P(H)-P(H)$, допускает единственное распространение с сохранением положительности на $\overline{P(H)-P(H)}$. Таким образом, конус $P(H)$ симплициален и в $\overline{P(H)-P(H)}$.

З а м е ч а н и е 3. Пусть H — допустимое подпространство пространства C_Q, причем *все состояния на H являются чистыми*, т. е. каждый положительный нормированный функционал на H есть след некоторой меры Дирака. Можно показать, что в этом случае симплициальность $P(H)$ равносильна интерполяционному свойству Рисса в H. При этом пару (H, C_Q) называют *симплексом Шоке*. В случае, когда Q — выпуклый компакт в локально выпуклом пространстве и H — пространство непрерывных аффинных функций на Q, допуская вольность речи, сам компакт Q называют симплексом Шоке. Важно отметить, что таких симплексов достаточно много. Именно, Христенсен показал, что в *пространстве Фреше каждый компакт содержится в векторной сумме двух симплексов Шоке*. Этот результат неулучшаем в том смысле, что *в каждом бесконечномерном банаховом пространстве существуют компакты, не содержащиеся ни в одном симплексе Шоке* [61].

Пусть H — конус в K-пространстве Z. Элемент h_1 из Z называется 1-*аффинным*, если найдется возрастающее семейство (h_α) в H такое, что $h_\alpha \uparrow h_1$. Элемент $h_2 \in Z$ называется 2-*аффинным*, если найдется убывающее семейство (g_β) из 1-аффинных элементов такое, что $g_\beta \downarrow h_2$. Множество всех 2-аффинных элементов обозначается ${}^2H$.

VI. *Пусть H — коинициальное подпространство в K-пространстве Z и $X = \overline{P(H) - P(H)}$. Если H обладает свойством интерполяции Рисса и проектор P в Z таков, что $P \leqslant P_{\mathrm{Ch}}$, то разрешима задача Дирихле в классе 2-аффинных элементов, т. е. $P[X] \subset P[{}^2H]$.*

В силу предложения V для всякого элемента $g \in -P(H)$ элемент $\mathrm{co}_H g$ является 1-аффинным. Возьмем $x \in X$. Поскольку P по теореме 1 является надмаксимальным проектором, то по предложению VIII из пункта **1.3** выполняется

$$Px = \inf\{Pg : g \geqslant x,\ g \in -P(H)\} = \inf\{P\mathrm{co}_H g : g \geqslant x,\ g \in -P(H)\} = P\inf\{\mathrm{co}_H g : g \geqslant x,\ g \in -P(H)\}.$$

Множество $\{g \in -P(H) : g \geqslant x\}$ фильтруется по убыванию, откуда и вытекает требуемое утверждение.

Приведенное предложение показывает, что надмаксимальные операторы должны в известном смысле факторизоваться линейным продолжением оператора H-выпуклой оболочки. Этот факт действительно имеет место. Точнее, справедливо следующее утверждение.

VII. *Пусть H — симплициальный конус в X. Оператор $T_0 \in L^+(X, Z)$ фиксирован и $T \in L^+(Z, Y)$ — некоторый T_0-максимальный оператор. Следующая диаграмма коммутативна*

$$\begin{array}{ccc} H \subset X & \xrightarrow{T_0} & Z \\ {\scriptstyle \Psi_H(T_0)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T} \\ Z & \xrightarrow{T} & Y. \end{array}$$

По лемме о фильтрации ростка для оператора $\Psi_H(T_0)$ и любого элемента $h \in H$ справедливо представление

$$\Psi_H(T_0)(-h) = q_{H,T_0}(-h).$$

Из этого равенства вытекает оценка

$$T\Psi_H(T_0)(-h) = Tq_{H,T_0}(-h) \geqslant q_{H,TT_0}(-h).$$

Поскольку $q_{H,T_0}(-h) \leqslant T_0(-h)$, то $TT_0(-h) \geqslant T\Psi_H(T_0)(-h)$. Таким образом, в силу предложения VIII из **1.3** получается

$$TT_0(-h) \geqslant T\Psi_H(T_0)(-h) \geqslant q_{H,TT_0}(-h) = TT_0(-h).$$

Итак, операторы $T\Psi_H(T_0)$ и TT_0 положительны и совпадают на конусе, плотном в X. Значит, эти операторы совпадают на X.

Из предложения VII немедленно вытекает

VIII. *Для оператора $T \in \mathfrak{M}(T_0)$ выполняется*

$$\operatorname{Ker}(T) \supset T_0[\operatorname{Ker}(\Psi_H(T_0))].$$

Собранные в предложениях III, V—VIII вспомогательные сведения наводят на мысль, что оператор $\Psi_H(T_0)$ играет роль оператора продолжения с границы Шоке. В следующем пункте для наиболее часто встречающегося в приложениях класса конусов соответствующие связи с задачей Дирихле будут описаны полностью.

В заключение этого пункта рассмотрим пример симплекса, полезного в теории меры. Предварительно введем определение.

Пусть H — коинициальное подпространство в векторной решетке X. Конус S в X называется *геометрическим симплексом с базой H*, если S содержит H и, кроме того, для любых элементов $f, g \in S$ таких, что $-f \geqslant g$, найдется элемент $h \in H$, для которого $-f \geqslant h \geqslant g$.

Подпространство H, обладающее свойством интерполяции Рисса, как установлено в предложении IV, является базой геометрического симплекса $P(H)$. Так же, как и в предложении V, нетрудно установить, что если S — геометрический симплекс с базой H, то конус S симплициален в $S—S$ и следовательно, в $\overline{S—S}$. При этом справедливо

XI. *Пусть S — геометрический симплекс с базой H. Положим $X_0 = S—S$ и пуrь $T \in L^+(X_0, Y)$. Оператор T максимален относительно S в том и только в том случае, если $Tf = q_{H,T}(f)$ для всех $f \in -S$.*

В силу предложения V из **2.1** оператор T является максимальным в том и только в том случае, если равенство $Tf = q_{S,T}(f)$ справедливо для всех $f \in -S$. Используя условие симплициальности, последовательно получаем

$$q_{H,T}(f) \leqslant q_{S,T}(f) = \sup\{Tg : g \in S,\ g \leqslant f\} \leqslant$$
$$\leqslant \sup\{Th : g \leqslant h \leqslant f,\ h \in H\} \leqslant \sup T[U_{f,H}] = q_{H,T}(f).$$

Предложение доказано.

Интересно отметить, что геометрические симплексы можно расширять. В самом деле, имеет место

X. *Множество геометрических симплексов с фиксированной базой индуктивно по возрастанию.*

Пусть $\mathfrak{A}$ — множество симплексов с базой H, а Λ — произвольная цепь в $\mathfrak{A}$. Положим

$$S_\Lambda = \bigcup_{S' \in \Lambda} S'.$$

Ясно, что S_Λ — конус, содержащий H. Пусть $-f \geqslant g$, где f, $g \in S_\Lambda$. Так как Λ — цепь, то найдется конус S' из Λ такой, что f, $g \in S'$ и, значит, для некоторого $h \in H$ выполняется $-f \geqslant h \geqslant g$. Итак, S_Λ — геометрический симплекс, т. е. любая цепь в $\mathfrak{A}$ ограничена сверху.

Замечание 4. Из предложения X и леммы Цорна следует, что за каждым геометрическим симплексом следует максимальный по включению симплекс с той же базой. В частности, подпространство H содержится в максимальных геометрических симплексах с базой H. Не следует при этом полагать, что множество таких симплексов фильтруется по возрастанию. Действительно, рассмотрим обычный симплекс в $\mathbf{R}^n$ и в качестве H возьмем конус аффинных функций на этом симплексе. Конус выпуклых функций $\overline{P(H)}$ и конус вогнутых функций $-\overline{P(H)}$, как легко видеть, являются геометрическими симплексами с базой H. Ясно, однако, что геометрических симплексов с базой H, содержащих оба этих конуса, нет.

После общих замечаний о геометрических симплексах перейдем к упомянутому выше примеру.

Пример. Пусть S — конус полунепрерывных сверху функций из пространства $l_\infty(Q)$ на компакте Q. Конус S является геометрическим симплексом с базой C_Q. Последнее утверждение иногда называют *теоремой Тонга.*

Указанный факт можно извлечь, например, из теоремы Майкла о селекторах (см. [49]).

Пусть $X = \overline{S-S}$. Каждый оператор $T \in L^+(C_Q, Y)$, где Y — некоторое K-пространство, по теореме Канторовича допускает положительное распространение T_1 на S. Поскольку конус S симплициален и является верхней решеткой, то по предложению III определено аддитивное выметание Ψ_S. По предложению IX оператор $\Psi_S(T_1)$ полностью определяется значениями T_1 на базе C_Q, т. е. исходным оператором T. Полученный в результате описанной процедуры оператор T^r называется *регуляризацией* T или *бэровским расширением* T. Иными словами, регуляризация r — это аддитивный возрастающий оператор с возрастающим обратным, превращающий в коммутативную следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} L^+(X, Y) & \xrightarrow{\gamma} & L^+(X, Y)/\succ_{C_Q} \\ {\scriptstyle \Psi_S}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle I} \\ L^+(X, Y) & \xleftarrow{r} & L^+(C_Q, Y), \end{array}$$

где γ — каноническое отображение, связанное с эквивалентностью $\succ_{C_Q}$, а I — естественное отождествление $L^+(X, Y)/\succ_{C_Q}$ и $L^+(C_Q, Y)$. Нетрудно узнать в приведенной конструкции классическую схему Рисса — Маркова.

З а м е ч а н и е 5. Не следует полагать, что геометрические симплексы бывают только в пространствах непрерывных функций. Так, предложение VIII пункта **II.3.5** означает, что конус вогнутых операторов с фиксированным эффективным множеством образует геометрический симплекс с базой аффинных операторов относительно поточечной упорядоченности.

III.2.3. Изложим фрагмент теории Шоке, связывающий проблему единственности выметания с разрешимостью задачи Дирихле на соответствующей границе Шоке. Основной нашей целью будет показать, что указанный фрагмент теории связан с весьма сильными свойствами структуры порядка в соответствующих классах функций.

Выделим специальный класс симплициальных конусов — стандартные конусы, на которых особенно просто устроена компонента граничных операторов, и покажем, что стандартные конусы, связанные с подпространства-ми, являющимися векторными решетками в индуцированных порядках, порождают много разрешимых задач Дирихле. При этом оказывается, что разрешимость задачи Дирихле хотя бы на одном шиловском проекторе влечет стандартность конуса и граничность проектора.

Уместно подчеркнуть, что развиваемая мысль состоит в том, что в случае, когда компонента граничных функционалов *монотонно дополняема* (т. е. является областью значений положительного идемпотентного оператора, непрерывного в слабой топологии (r)-сопряженного пространства), ядра максимальных операторов ведут себя весьма просто — их общая часть, отвечающая за максимальность оператора, также оказывается дополняемой. Более того, в этом случае естественным образом вычисляются границы Шоке при любом выборе пробного K-пространства.

Для удобства изложение ведется только для симплициальных конусов, однако можно отметить, что в большинстве излагаемые результаты в силу теоремы о перестройке, завершающей этот пункт, остаются с очевидными изменениями верными в случае дополняемости компоненты граничных функционалов.

Итак, пусть H — коинициальная верхняя решетка в некоторой векторной решетке X, причем $X=\overline{H-H}$ и конус H является симплициальным. Конус H называется *стандартным* или *симплициальным в смысле Бауэра*, если оператор выметания регулярных функционалов Ψ_H: $:X^r \longrightarrow X^r$ непрерывен при наделении X^r слабой топологией $\sigma(X^r, X)$, порожденной двойственностью X и X^r. При этом, разумеется, мы считаем, что оператор Ψ_H распространен по линейности на все (r)-сопряженное пространство. Тем самым определен и сопряженный оператор Ψ_H^*, действующий из X в X. Этот оператор называется *оператором Дирихле* стандартного конуса H и обозначается символом $\mathscr{D}_H$.

Приведем некоторые примеры введенных объектов.

1. Пусть H — конус возрастающих непрерывных выпуклых функций на отрезке $[0, 1]$. Ясно, что этот конус — верхняя решетка, причем $\overline{H-H}=C_{[0,1]}$. Максимальные меры на H имеют вид $\alpha\varepsilon_1$, где $\alpha\in\mathbf{R}^+$. Конус H — стандартный, и оператор Дирихле этого конуса действует по формуле $\mathscr{D}_H f=f(1)\mathbf{1}$.

2. Рассмотрим отрезок $[0, 3]$ и в качестве H возьмем подпространство $C_{[0, 3]}$, состоящее из функций, аффинных на $[0, 1]$ и $[2, 3]$ и постоянных в $[1, 2]$. В качестве X возьмем $P(H)-P(H)$. Можно показать, что $P(H)$ — стандартный конус. Оператор Дирихле при этом на $[0, 1]$ и $[2, 3]$ аффинно интерполирует функцию по ее граничным значениям, оставляя эту функцию неизменной на $[1, 2]$.

3. Пусть Q — симплекс в $\mathbf{R}^n$, натянутый на точки e_0, $e_1, \ldots, e_n$. Оператор Дирихле $\mathscr{D}$, порожденный конусом непрерывных выпуклых функций, есть оператор аффинной интерполяции в C_Q, т. е.

$$\mathscr{D}f : \sum_{k=0}^{n} \alpha_k e_k \to \sum_{k=0}^{n} \alpha_k f(e_k),$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{R}^+$ и $\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_n=1$.

4. Пусть $\mathfrak{z}_n$ — единичный евклидов шар в $\mathbf{R}^n$ и H — пространство непрерывных в $\mathfrak{z}_n$ и гармонических внутри шара функций. Ясно, что $\overline{P(H)-P(H)} = C_{\mathfrak{z}_n}$ и оператор $\mathscr{D}_{P(H)}$ переводит функцию из $C_{\mathfrak{z}_n}$ в интеграл Пуассона ее граничных значений на сфере Z_n.

Следующий пример является обобщением примеров 2—4.

5. Пусть H — допустимое подпространство в C_Q, являющееся векторной решеткой в индуцированном порядке. Допустим также, что $H = P(H) \cap \left(-\overline{P(H)}\right)$. В этом случае пара (H, C_Q) называется *симплексом Бауэра.*

Пара (H, C_Q) является симплексом Бауэра в том и только в том случае, если конус $P(H)$ — стандартный. В самом деле, ограничимся рассмотрением случая, когда Q можно считать выпуклым, а пространство H — совпадающим с пространством непрерывных аффинных на Q функций. Характеристическим свойством симплекса Бауэра служит широкая непрерывность отображения $\tau: x \longrightarrow$ (максимальная вероятностная мера с барицентром в x)
Напомним, что *широкой топологией* в пространстве $(C_Q)'$ называется топология $\sigma((C_Q)', C_Q)$.

Таким образом, высказанное утверждение следует из коммутативности следующей диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
M_+^1 \arrow[r, "\Psi_{P(H)}"] \arrow[d, "\mathrm{bar}"'] & M_+^1 \\
Q \arrow[r, "i"] \arrow[ur, "\tau"] & \mathrm{ex}(M_+^1) \arrow[u, "\Psi_{P(H)}"']
\end{tikzcd}$$

Здесь bar — барицентрическое отображение, сопоставляющее вероятностной мере ее барицентр, функция i — каноническое вложение Q в множество M_+^1 вероятностных мер Радона, $\mathrm{ex}(M_+^1)$ — множество крайних точек M_+^1 и $\Psi_{P(H)}$ — оператор выметания.

Легко видеть, что в случае симплекса Бауэра оператор Дирихле $\mathscr{D}_{P(H)}$ переводит функцию f из C_Q в функцию из H, являющуюся решением задачи Дирихле с граничными данными $f|_{\mathrm{Ch}}$. Здесь $\mathrm{Ch}=\mathrm{Ch}(H, C_Q, \mathbf{R}^Q)$.

Следующие два примера принципиально отличаются от примера 5.

6. Пусть H^p, где для удобства $1<p\leqslant+\infty$, — пространство гармонических внутри шара $\mathfrak{z}_n$ функций f с граничными значениями f_b из $L^p(Z_n)$. Рассмотрим множество пар функций $\{(f, f_b) : f\in H^p\}$. Соответствующий конус в пространстве

$$Z=\mathbf{R}^{\mathfrak{z}_n\setminus Z_n}\times L^p(Z_n)$$

обозначим H. Можно показать, что H коинициален пространству $P(H)-P(H)$. Для границы Шоке выполняется соотношение

$$\mathrm{Ch}(H,\ P(H)-P(H),\ Z)=\{0\}\times L^p(Z_n),$$

при этом $P(H)$ симплициален в смысле Бауэра и оператор Дирихле действует по формуле

$$\mathscr{D}_{P(H)}: (f,\ g)\longrightarrow (\text{интеграл Пуассона } g,\ g).$$

7. Этот пример при $1<p\leqslant+\infty$ является переформулировкой предыдущего с точностью до изоморфных объектов. Однако он годится и для класса H^1 разностей по-

ложительных гармонических функций. Именно, рассмотрим пространство

$$Z = \mathbf{R}^{\delta_n \setminus Z_n} \times H^p$$

и конус $H = \{(h, h) : h \in H^p\}$. Тогда

$$\mathrm{Ch}(H, P(H) - P(H), Z) = \{0\} \times H^p$$

и оператор Дирихле действует по формуле $(f, g) \longrightarrow (g, g)$.

Займемся подробным изучением стандартных конусов и их связью с задачей Дирихле. Изложенные ниже результаты, в частности, содержат некоторые детали, опущенные в приведенных примерах.

Прежде всего покажем, что на стандартных конусах можно полностью описать все максимальные операторы, действующие в произвольные K-пространства.

Теорема 6(2.III). *Пусть H — стандартный конус.*

(1) *Оператор Дирихле $\mathscr{D}_H$ максимален относительно H.*

(2) *Для любого K-пространства Y и оператора $T \in L^+(X, Y)$ коммутативна диаграмма*

$$\begin{tikzcd} & Y & \\ X \arrow[ur, "\Psi_H(T)"] \arrow[rr, "D_H"'] & & X \arrow[ul, "T"'] \end{tikzcd}$$

(3) *Оператор $\mathscr{D}_H$ идемпотентен и $\mathscr{D}_H[X] = \overline{H} \cap (-\overline{H})$.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что $\mathscr{D}_H \in L^+(X, X)$. Действительно, если $x \in X^+$ и $f \in (X^r)^+$, то $f(\mathscr{D}_H x) = \Psi_H f(x) \geqslant 0$, что и означает положительность $\mathscr{D}_H x$, так как X регулярно упорядочено. Пусть теперь $T' \in \mathrm{Spr}\,(\mathscr{D}_H, H)$. Для функционала f и элемента $h \in H$ имеем $f(T'h) \geqslant f(\mathscr{D}_H h) = \Psi_H f(h)$. Так как Ψ_H — выметание, то $f(T'x) = \Psi_H f(x) = f(\mathscr{D}_H x)$ для всех $x \in X$. Значит, $T' = \mathscr{D}_H$ и (1) доказано.

Пусть теперь $T \in L^+(X, Y)$. Для доказательства (2) установим, что $T\mathscr{D}_H$ — максимальный оператор и, кроме того, $T\mathscr{D}_H \in \mathrm{Spr}(T, H)$. Тогда требуемое утверждение будет следовать из симплициальности конуса H.

Возьмем оператор $T' \in L^+(X, Y)$ такой, что $T'h \geqslant \geqslant T\mathscr{D}_H h$ для всех $h \in H$. Тогда для $f \in (Y^r)^+$ выполняется

$$f(T'h) \geqslant f(T\mathscr{D}_H h) = T^*f(\mathscr{D}_H h) = \Psi_H T^*f(h).$$

Следовательно, в силу максимальности функционала $\Psi_H T^*f$ выполняется $(T')^*f = \Psi_H T^*f$. Последнее означает, что $\mathrm{Spr}(T\mathscr{D}_H, H) = \{T\mathscr{D}_H\}$.

Пусть теперь $h \in H$ и f, как и выше, входит в $(Y^r)^+$. Тогда

$$f(T\mathscr{D}_H h) = T^*f(\mathscr{D}_H h) = \Psi_H T^*f(h) \geqslant T^*f(h) = f(Th).$$

Иными словами, $T\mathscr{D}_H \succ_H T$.

Осталось установить (3). Для функционала $f \in (X^r)^+$ и элемента h конуса H выполняется, что $f(\mathscr{D}_H h) = \Psi_H f(h) \geqslant f(h)$, так как Ψ_H — выметание. Значит, в силу регулярности упорядочения в X выполняется $\mathscr{D}_H h \geqslant h$ и, следовательно, $\mathscr{D}_H^2 \in \mathrm{Spr}(\mathscr{D}_H, H)$. В силу (1) оператор $\mathscr{D}_H$ максимален, значит, $\mathscr{D}_H^2 = \mathscr{D}_H$. Более того, из полученного неравенства следует справедливость включения $\mathscr{D}_H[X] \supset \overline{H} \cap (-\overline{H})$.

Проверим обратное включение. Для этого заметим, что для элемента $h \in H$ и регулярного функционала $f \in \in H^*$ выполняется

$$f(\mathscr{D}_H h) = \Psi_H f^+(h) - \Psi_H f^-(h) = 0,$$

поскольку $f^+ \succ_H f^-$. Значит, $\mathscr{D}_H h \in \overline{H} \cap (-\overline{H})$. По условию имеем $X = \overline{H - H}$ и, кроме того, оператор $\mathscr{D}_H$ — непрерывен. Отсюда получается, что $\mathscr{D}_H[X] \subset \overline{H} \cap (-\overline{H})$. Теорема доказана полностью.

Замечание 1. Теорему 6 часто называют *теоремой о факторизации*. Эта теорема устанавливает определяющее свойство оператора Дирихле — каждый максимальный оператор полностью восстанавливается по своим значениям на подпространстве $\mathscr{D}_H[X]$.

Некоторые следствия полученной теоремы оформим в виде предложений.

I. *Для каждого элемента* $h \in -H$ *существует* $\mathrm{co}_H h = \sup_X U_{h,H}$. *При этом для оператора Дирихле выполняется*

$$\mathscr{D}_H(h_1 - h_2) = \mathrm{co}_H(-h_2) - \mathrm{co}_H(-h_1) \quad (h_1, h_2 \in H).$$

Векторная решетка X является архимедовой в силу регулярности упорядочения в X. Поэтому можно считать, что X вложено в некоторое регулярно упорядоченное K-пространство Z (например, в дедекиндово пополнение X). Пусть $E: X \longrightarrow Z$ — тождественное вложение. По теореме 6 справедливо представление $\Psi_H(E)x = \mathscr{D}_H x$ для $x \in X$. Кроме того, по лемме о фильтрации

$$\Psi_H(E)h = q_{H,E}(h) = \sup_Z U_{h,H} \quad (h \in -H).$$

Помимо этого, элемент $\Psi_H(E)h = \mathscr{D}_H h$ входит в X. Следовательно, $\mathscr{D}_H h$ является верхней гранью в X множества $U_{h,H}$.

Замечание 2. Пусть S — геометрический симплекс с базой C_Q ограниченных полунепрерывных сверху функций на компакте Q. Конус S, как следует из предложения I, вообще говоря, не стандартный. Действительно, в противном случае оператор Дирихле конуса S является тождественным и, значит, выметание — тоже тождественный оператор. Иными словами, в таком случае каждый оператор из $L^+(\overline{S-S}, Y)$ является регуляризацией некоторого оператора из $L^+(C_Q, Y)$.

II. *Оператор является максимальным относительно стандартного конуса в том и только в том случае, если его нулевая решетка содержит нулевую решетку оператора Дирихле.*

Если оператор T максимален, то по теореме 6 $T = T\mathscr{D}_H$ и, значит, $N(\mathscr{D}_H) \subset N(T)$. Пусть, наоборот, дано, что $N(\mathscr{D}_H) \subset N(T)$. Имеем для всех $x \in X$ равенство $Tx = T\mathscr{D}_H x + T(x - \mathscr{D}_H x)$. В частности, для элемента $x \in -H$ по предложению I $\mathscr{D}_H x = \mathrm{co}_H x \leqslant x$ и, следовательно, $x - \mathscr{D}_H x \in N(\mathscr{D}_H)$. Значит, $Tx = T\mathscr{D}_H x$ для $x \in -H$. Отсюда вытекает, что $T = T\mathscr{D}_H$. Вновь привлекая теорему 6, убеждаемся в максимальности T.

Вернемся теперь к симплициальным конусам, связанным со свойством интерполяции Рисса.

III. *Пусть H — коинициальное подпространство в векторной решетке Z, причем H является векторной решеткой в индуцированном из Z порядке. Тогда $P(H)$ — стандартный конус в пространстве $X = P(H) - P(H)$.*

Симплициальность $P(H)$ в X установлена предложением V пункта 2.2, поскольку H, разумеется, обладает интерполяционным свойством Рисса. Проверим, что $P(H)$ симплициален в смысле Бауэра.

Покажем сначала, что для $g \in P(H)$ существует

$$\mathrm{co}_H(-g) = \sup_Z U_{-g,\, P(H)},$$

причем $\mathrm{co}_H(g) \in H$. В самом деле, $-g = h_1 \wedge \ldots \wedge h_m$, где $h_k \in H$. По предположению существует элемент $g_0 = \inf_H \{h_1, \ldots, h_m\}$. Если элемент $f = h'_1 \vee \ldots \vee h_n$, где $h'_s \in H$, таков, что $f \leqslant -g$, то $g_0 \geqslant h'_s$ $(s = 1, \ldots, n)$ и, значит, $g_0 \geqslant f$. С другой стороны, $g_0 \in H \subset P(H)$ и $g_0 \leqslant -g$, т. е. $g_0 \in U_{-g,\, P(H)}$. Следовательно, $g_0 = \mathrm{co}_H(-g)$.

Возьмем теперь положительный функционал $f \in X^r$. По лемме о фильтрации ростка выполняется

$$\begin{aligned}\Psi_{P(H)} f(h_1 - h_2) &= q_{P(H),f}(-h_2) - q_{P(H),f}(-h_1) = \\ &= \sup f[U_{-h_2,P(H)}] - \sup f[U_{-h_1,P(H)}] = \\ &= f(\mathrm{co}_H(-h_2)) - f(\mathrm{co}_H(-h_1))\end{aligned}$$

для любых $h_1, h_2 \in P(H)$. Таким образом, функция $f \longrightarrow \Psi_{P(H)} f(x)$ непрерывна при $x \in X$. Предложение доказано.

IV. *Если в предложении* III Z *является K-пространством и* $X = \overline{P(H) - P(\mathrm{H})}$, *то конус* $P(H)$ — *стандартный в* X.

По предложению III определен оператор Дирихле

$$\mathscr{D}_{P(H)} : P(H) - P(H) \longrightarrow X.$$

По теореме Канторовича этот оператор допускает монотонное распространение $\mathscr{D}$ на X. Допустим, что для некоторого $x \in X$ элемент $\mathscr{D}x$ не входит в X. Поскольку X замкнуто, то найдется функционал $f \in Z^r$ такой, что $f(z) = 0$ для всех $z \in X$ и $f(\mathscr{D}x) \neq 0$. Найдем сеть (x_α) в $P(H) - P(H)$ такую, что $x_\alpha \longrightarrow x$. Поскольку $\mathscr{D}^* f(x_\alpha) = 0$, то

$$0 \neq f(\mathscr{D}x) = \mathscr{D}^* f(x) = \lim_\alpha \mathscr{D}^* f(x_\alpha) = 0.$$

Значит, $\mathscr{D}[X] \subset X$. Итак, $\mathscr{D}^* : X^r \longrightarrow X^r$. Кроме того, операторы $\mathscr{D}$ и Ψ_H^* совпадают на плотном в X множестве.

При применении предложений III и IV полезно иметь в виду

V. *Если подпространство H является векторной решеткой в индуцированном порядке, то H коинициально $P(H)-P(H)$.*

Действительно, элемент $h_1 \wedge \ldots \wedge h_n \in -P(H)$, где $h_k \in H$, является верхней границей элемента $\inf_H\{h_1, \ldots, h_n\}$.

Замечание 3. Если оператор Дирихле $\mathscr{D}_{P(H)}$ конуса $P(H)$ в пространстве $P(H)-P(H)$ допускает распространение $\mathscr{D}$ по непрерывности на $X=\overline{P(H)-P(H)}$, то $\mathscr{D}$ положительно в силу непрерывности решеточных операций в регулярной топологии и, значит, $\mathscr{D}$ есть оператор Дирихле конуса $P(H)$ в пространстве X.

Приведем теперь основной результат о разрешимости задачи Дирихле, поставленной на границе Шоке, показывающий, в частности, что описанный предложением III способ построения симплициальных конусов является общим.

Теорема 7(2.III). *Пусть H — подпространство K-пространства Z, причем $X=\overline{P(H)-P(H)}$ и P_{Ch} — проектор Шоке на компоненту* $\mathrm{Ch}(H, X, Z)$.

(1) *Если H является векторной решеткой в упорядоченности, индуцированной Z, и P — проектор в Z, причем $P \leqslant P_{\mathrm{Ch}}$, то $P[X]=P[H]$.*

(2) *Если шиловский проектор P таков, что $P[X]=P[H]$, то $P \leqslant P_{\mathrm{Ch}}$ и, кроме того, H является векторной решеткой в индуцированном из Z порядке.*

Доказательство. (1). Рассмотрим оператор Дирихле $\mathscr{D}=\mathscr{D}_{P(H)}$, определенный в силу предложений III и V. По предложению I выполняется $\mathscr{D}(h_1-h_2)=$ $=\mathrm{co}_H(-h_2)-\mathrm{co}_H(-h_1)$. Последние два элемента входят в H и, значит, $\mathscr{D}(h_1-h_2) \in H$. Таким образом, $\mathscr{D}[X]=H$.

Проектор P мажорируется проектором Шоке и, следовательно, ввиду теорем 1 и 2 является надмаксимальным оператором. Значит, по теореме о факторизации для $x \in X$ имеем $Px=P\mathscr{D}x$. Окончательно получаем

$$P[X]=P\mathscr{D}[X]=P[\mathscr{D}[X]]=P[H].$$

(2). Заметим, прежде всего, что сужение шиловского проектора P на H обратимо, причем обратный оператор

$p^{-1}:P[H] \longrightarrow H$ положителен. Действительно, если $Ph_1 - Ph_2$, то $P(h_1 - h_2) = 0$ и, следовательно, $h_1 = h_2$. Условие положительности p^{-1} совпадает с определением шиловского проектора.

Определим оператор $\mathscr{D}: X \longrightarrow X$ соотношением $\mathscr{D}x = p^{-1}Px$ для $x \in X$. Отметим, что $\mathscr{D}$ — положительный оператор, причем $\mathscr{D}^2 = \mathscr{D}$ и $\mathscr{D} = [X] = H$.

Возьмем $h_1, h_2 \in H$ и рассмотрим элемент $h_0 = \mathscr{D}(h_1 \wedge \wedge h_2)$. В силу монотонности $\mathscr{D}$ выполняется $h_0 \leqslant \mathscr{D}h_1 = h_1$ и $h_0 \leqslant \mathscr{D}h_2 = h_2$. Если h — некоторый элемент H, причем $h \leqslant h_1 \wedge h_2$, то $h = \mathscr{D}h \leqslant \mathscr{D}(h_1 \wedge h_2) = h_0$. Итак, h_0 — инфимум $\{h_1, h_2\}$ в подпространстве H и, следовательно, H является векторной решеткой в упорядоченности, индуцированной Z.

Применим теперь предложение III. По этому предложению $P(H)$ является стандартным конусом, при этом введенный выше оператор $\mathscr{D}$ совпадает с оператором Дирихле конуса $P(H)$. С другой стороны, по построению $\mathscr{D}x = p^{-1}Px$ для $x \in X$ и, стало быть, выполняется $P\mathscr{D}x = Pp^{-1}Px = Px$. Последнее соотношение по теореме о факторизации означает, что проектор P является надмаксимальным. Иными словами, $P \leqslant P_{\mathrm{Ch}}$. Теорема доказана.

Замечание 4. Отметим, прежде всего, что если H — замкнутое подпространство в Z, то теорема 7 справедлива и для пространства $X = \overline{P(H) - P(H)}$. Для доказательства достаточно в соответствующем месте заменить ссылку на предложение III ссылкой на предложение IV.

Отметим также, что щель между условиями (1) и (2) отвечает существу дела. Более того, известны ситуации, в которых многие граничные проекторы решают задачу Дирихле относительно подпространства H, но H не обладает даже свойством интерполяции Рисса (см., например, предложение II.3.19 из [1]). С другой стороны, даже на стандартных конусах проектор Шоке не обязательно является шиловским. Элементарным примером служит конус $P(H)$ в $P(H) - P(H)$, где H— аффинные функции на $[0, 1)$ и $Z = \mathbf{R}^{[0, 1)}$. Очевидно, что H является векторной решеткой в индуцированном порядке и граница Шоке отождествляется с точкой 0. Таким образом, мы сталкиваемся с *проблемой граничных* *значений* (или, если угодно, с проблемой вложения): существуют подпространства, которые потенциально составлены из решений задачи Дирихле, однако, где нужно ставить эту задачу, не ясно. Например, неизвестны общие условия, обеспечивающие нетривиальность компоненты Шоке. В классической теории наиболее мощный результат в этом направлении принадлежит Бауэру [8].

Замечание 5. В описанной теоремой 7 ситуации шиловские проекторы, решающие задачу Дирихле, не слишком отличаются от проектора Шоке. Действительно, если P — шиловский проектор и $P[X]=P[H]$, то по указанной теореме $P \leqslant P_{\mathrm{Ch}}$, т. е. $N(P) \supset \mathrm{Ch}^d$. С другой стороны, в силу предложения VI из пункта **2.1** выполняется

$$N(PE) = N(P) \cap X \subset \mathrm{Ch}^d,$$

где E — тождественное вложение X в Z. Итак,

$$N(PE) \subset \mathrm{Ch}^d \cap X \subset N(P) \cap X = N(PE).$$

Окончательно получаем равенство

$$N(PE) = N(P_{\mathrm{Ch}}E).$$

В частности, оператор сужения на некоторое подмножество A симплекса Бауэра решает задачу Дирихле в классе аффинных функций с выполнением принципа максимума в том и только в том случае, если A плотно в множестве крайних точек исходного выпуклого компакта.

Замечание 6. Рассмотрим ситуацию пункта (1) теоремы 7, некоторое K-пространство Z_1 и оператор $T_0 \in L^+(X, Z_1)$. Пусть $T \in L^+(Z_1, Y)$ — некоторый T_0-максимальный оператор. По теореме о факторизации справедливо представление

$$\Psi_{P(H)}(TT_C) = TT_0\mathscr{D}_{P(H)},$$

уточняющее диаграмму предложения VII из **2.2**. В частности, для проектора Шоке $P_{\mathrm{Ch}(T_0)}$ справедливо соотношение

$$P_{\mathrm{Ch}(T_0)}T_0[X] = P_{\mathrm{Ch}(T_0)}T_0[H].$$

Иными словами, задача Дирихле разрешима и при рассмотрении произвольных пробных булевских алгебр, правда, уже для измененной при помощи оператора T_0 пары пространств.

В настоящее время связь симплициальности с задачами Дирихле исчерпывающим образом исследована для эллиптических уравнений и в меньшей степени для параболических уравнений. В качестве примера приведем замечательную *теорему Эффроса — Каждана* [66].

Пусть G — ограниченное открытое связное множество в $\mathbf{R}^n$ и H — пространство гармонических в G и непрерывных в $\overline{G}$ функций. Если множество регулярных точек границы G замкнуто, то $(H, C_{\overline{G}})$ является симплексом Бауэра. В противном случае H является антирешеткой в индуцированном из $C_{\overline{G}}$ порядке, т. е. если h, $g \in H$ и в H существует т. в. г. множества $\{h, g\}$, то либо $h \leqslant g$, либо $g \leqslant h$.

Иными словами, если множество регулярных точек на границе области не замкнуто и задача Дирихле разрешима для непрерывных граничных данных h и g, то эта задача не разрешима для функции $h \vee g$, за исключением случаев $h \leqslant g$ и $g \leqslant h$.

В заключение текущего параграфа отметим, что непрерывные аддитивные выметания встречаются не только на стандартных конусах. Это обстоятельство весьма существенно в теории Шоке, так как в таких случаях компонента граничных функционалов дополняема и является полярой дополняемого пространства.

Пример. Пусть H — адаптированный конус в пространстве непрерывных функций C_Q на метризуемом компакте Q. Пара (H, C_Q) обладает *CE-свойством*, если тройка $(H, C_Q, l_\infty(Q))$ — стандартна, т. е. для любой функции $f \in -H$ ее H-выпуклая оболочка $\mathrm{co}_H f$ непрерывна. Отметим, что в силу непрерывности оператора co_H в нормированной топологии выпуклая оболочка любой непрерывной H-вогнутой функции непрерывна. Оказывается, что в данном случае компонента $\mathfrak{B}(\mathbf{R})$ граничных мер является широко замкнутой и, более того, дополняемой. Точнее, справедливо

VI. *Следующие утверждение эквивалентны*:

(1) *Пара (H, C_Q) обладает CE-свойством.*

(2) *Для всякой $f \in C_Q$ выполняется $\mathrm{co}_H(-\mathrm{co}_H f) \in C_Q$.*

(3) *Компонента* $\mathfrak{B}(\mathbf{R})$ *дополняема в широкой топологии и отображение* $\Phi: x \to \operatorname{Spr}(\varepsilon_x, H) \cap \mathfrak{B}(\boldsymbol{R})$ *непрерывно в широкой топологии Хаусдорфа.*

(4) *Для каждой точки* $x \in Q$ *и максимальной меры* μ_x *такой, что* $\mu_x \succ_H \varepsilon_x$, *существует широко непрерывное аддитивное выметание* $\Psi(x, \mu_x)$, *для которого* $\Psi(x, \mu_x)(\varepsilon_x) = \mu_x$.

Эквивалентность свойств (3) и (4) очевидна в силу теоремы Майкла о селекторах. Поэтому достаточно установить импликации (1) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1).

(1) $\Rightarrow$ (3). В силу предложения V пункта **2.1** множество максимальных функционалов широко замкнуто. Отсюда следует, что отображение Φ широко полунепрерывно сверху и, значит, оператор

$$P_\Phi : f \longrightarrow (x \longrightarrow \sup\{\mu(f) : \mu \in \Phi(x)\})$$

переводит C_Q в конус полунепрерывных сверху функций. Для доказательства непрерывности Φ следует в виду теоремы Линке [31] установить, что P_Φ действует в C_Q. В силу леммы о выметании и предложения VIII пункта **1.3** последовательно получаем

$$\begin{aligned} P_\Phi f(x) &= \sup\{q_{H,\mu}(f) : \mu \succ_H \varepsilon_x,\ \mu \in \mathfrak{B}(\mathbf{R})\} = \\ &= \sup_{h \in U_f} \sup\{\mu(h) : \mu \succ_H \varepsilon_x,\ \mu \in \mathfrak{B}(\mathbf{R})\} = \\ &= \sup_{h \in U_f} \sup\{\mu(h) : \mu \succ_H \varepsilon_x\} = \\ &= \sup_{h \in U_f} (-\inf\{\mu(-h) : \mu \succ_H \varepsilon_x\}) = \\ &= \sup_{h \in U_f} (-q_{H,\varepsilon_x}(-h)) = \sup_{h \in U_f} (-\operatorname{co}_H(-h)(x)). \end{aligned}$$

Таким образом, функция $P_\Phi f$ полунепрерывна снизу в силу непрерывности функций $\operatorname{co}_H(-h)$, где $h \in U_{f,H}$.

Осталось проверить дополняемость $\mathfrak{B}(\mathbf{R})$. Для этого достаточно выбрать широко непрерывный селектор φ отображения Φ и рассмотреть оператор Ψ, сопряженный к линейному оператору

$$f \longrightarrow (x \longrightarrow \varphi(x)(f)).$$

В силу замкнутости множества максимальных мер оператор Ψ является выметанием.

(3) $\Rightarrow$ (2). Следует проверить, что $P_\Phi = -\mathrm{co}_H(-\mathrm{co}_H f)$. Поскольку для функции $h \in U_f$ выполняется $h \leqslant \mathrm{co}_H f$, то справедливо соотношение $P_\Phi \leqslant -\mathrm{co}_H(-\mathrm{co}_H f)$. Осталось установить обратное неравенство.

Проведим сначала, что функция $P_\Phi f$ является H-вогнутой. В силу ее непрерывности последнее свойство эквивалентно условию

$$\mu \succ_H \varepsilon_x \Rightarrow \mu(P_\Phi f) \leqslant P_\Phi f(x).$$

Из-за монотонности оператора P_Φ имеем, что семейство функций $\{-\mathrm{co}_H(-h) : h \in U_f\}$ фильтруется по возрастанию. Кроме того, это семейство лежит в C_Q. Значит, если $\mu \succ_H \varepsilon_x$, то

$$\mu(P_\Phi f) = \sup_{h \in U_f} \mu(-\mathrm{co}_H(-h)) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{h \in U_f} (-\mathrm{co}_H(-h)(x)) = P_\Phi f(x).$$

По определению оператора P_Φ справедлива оценка

$$P_\Phi f = \sup_{h \in U_f} (-\mathrm{co}_H(-h)) \geqslant \sup_{h \in U_f} \mathrm{co}_H h = \mathrm{co}_H f.$$

Значит, в силу выпуклости $-P_\Phi f$ выполняется

$$-P_\Phi f \leqslant \mathrm{co}_H(-P_\Phi f) \leqslant \mathrm{co}_H(-\mathrm{co}_H f),$$

что и требовалось.

(2) $\Rightarrow$ (1). Для функции $h \in -H$ имеем $\mathrm{co}_H h = \mathrm{co}_H(-\mathrm{co}_H(-h))$ и, значит, $\mathrm{co}_H h \in C_Q$. Предложение доказано полностью.

В описанной предложением I ситуации все широко непрерывные аддитивные выметания порождаются линейным операторами, действующими в C_Q и опорными к сублинейному оператору P_Φ, иными словами, слабо непрерывными селекторами отображения Φ в силу теоремы Гельфанда об общем виде операторов в C_Q. Заметим также, что множество N — общая часть ядер максимальных функционалов, совпадающая, как мы увидим ниже, с общей частью ядер всех максимальных операторов, и компонента $\mathfrak{B}(\mathbf{R})$ являются полярами друг к другу. Более того, каждое из этих пространств дополняемо. При этом соответствующими проектами в $(C_Q)^r$ могут служить широко непрерывные аддитивные выметания, а проекторами на дополнение N в C_Q — опорные операторы к оператору P_Φ. Разумеется, что выметания и опорные операторы взаимно сопряжены. Подчеркнем, что здесь речь идет о проекторах в смысле линейного анализа, т. е. об идемпотентных операторах. Проектор на компоненту $\mathfrak{B}(\mathbf{R})$, как правило, выметанием не является!

Замечание 7. Селекторы отображения Φ называются *барицентрическими координатами*. Таким образом, в предположении метризуемости Q выполняется: (существует достаточное множество непрерывных барицентрических координат + граница Шоке $\mathrm{Ch}(H)$ замкнута) $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ (пара (H, C_Q) обладает CE-свойством). Здесь же уместно отметить, что привлекая вместо теоремы Майкла теорему Хасуми [29], можно показать, что для экстремального компакта существование широко непрерывного аддитивного выметания равносильно замкнутости границе Шоке.

Приведенный пример наводит на мысль, что случай дополняемости компоненты граничных функционалов $\mathfrak{B}(\mathbf{R})$ не сильно отличается от ситуации стандартного конуса. Действительно, справедливо следующее общее утверждение, носящее название *теоремы о перестройке.*

Теорема 8 (2.III). *Пусть H — коинициальный конус в векторной решетке $X=\overline{P(H)-P(H)}$, являющейся подрешеткой K-пространства Z. Пусть, далее, компонента граничных в смысле Шоке функционалов дополняема в слабой топологии пространства X^r и Ψ — соответствующий положительный идемпотентный оператор. Положим $\mathcal{D}=\Psi^*$ и $H_1=\mathcal{D}[X]$. Пусть $X=\overline{P(H_1)-P(H_1)}$ и H_1 коинициален Z. Тогда*

(1) *компоненты граничных операторов в упорядоченностях Шоке, наводимых H и H_1, совпадают;*

(2) *конус $P(H_1)$ является стандартным;*

(3) *оператор $\mathcal{D}$ совпадает с оператором Дирихле $\mathcal{D}_{P(H_1)}$;*

(4) *оператор Ψ совпадает с единственным выметанием $\Psi_{P(H_1)}$.*

Доказательство. Утверждение (2) очевидно. В силу теоремы 7 для $h_1, \ldots, h_n \in H_1$ выполняется

$$\mathcal{D}_{P(H_1)}(h_1 \wedge \ldots \wedge h_n) = \inf\nolimits_{H_1}\{h_1, \ldots, h_n\} = \\ = \mathcal{D}(h_1 \wedge \ldots \wedge h_n)$$

и, например, по предложению IV $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{P(H_1)}$. Таким образом, (3) доказано, а значит, доказано и (4), поскольку

$$\Psi = \mathscr{D}^* = \mathscr{D}^*_{P(H_1)} = \Psi_{P(H_1)}.$$

В силу предложения II оператор максимален в упорядоченности Шоке, наводимой конусом H_1, в том и только в том случае, если его нулевая решетка содержит нулевую решетку оператора Дирихле. Значит, для доказательства (1) следует установить, что оператор T максимален в упорядоченности $\succ_{P(H)}$ в том и только в том случае, если $N(T) \supset N(\mathscr{D})$.

Заметим, прежде всего, что если $\mathscr{D}x = 0$ и элемент $h \in P(H)$ таков, что $h \leqslant x$, то $\mathscr{D}h \leqslant 0$. Значит, для всякого положительного функционала f на X выполняется

$$f(h) \leqslant \Psi_{P(H)} f(h) = \Psi_{P(H)} f(\mathscr{D}h) \leqslant 0,$$

где $\Psi_{P(H)}$ — некоторое выметание в пространстве X^r, порожденное конусом $P(H)$, поскольку

$$\Psi \Psi_{P(H)} f = \Psi_{P(H)} f.$$

Таким образом, $h \leqslant 0$. Значит, для любого $P(H)$-максимального оператора T выполняется в силу предложения VIII из **1.3**

$$Tx = \sup \{Th : h \in U_{x,\, P(H)}\} \leqslant 0.$$

Иными словами, $\operatorname{Ker}(T) \supset \operatorname{Ker}(\mathscr{D})$. Следовательно (ср. доказательство теоремы об анормальности),

$$N = \bigcap_{T \in \mathfrak{M}} N(T) = \bigcap_{T \in \mathfrak{M}} \operatorname{Ker}(T) \supset \operatorname{Ker}(\mathscr{D}) \supset N(\mathscr{D}).$$

С другой стороны, если $x \in N$, то для $f \in (X^r)^+$ выполняется $\mathscr{D}^* f(|x|) = 0$ и, значит, $\mathscr{D}|x| = 0$, т. е. $x \in N(\mathscr{D})$. Таким образом,

$$N = \operatorname{Ker}(\mathscr{D}) = N(\mathscr{D}).$$

Заметив это, рассмотрим оператор T, удовлетворяющий условию $N(T) \supset N(\mathscr{D})$. Тогда $\operatorname{Ker}(T)$ в силу доказанного содержит $\operatorname{Ker}(\mathscr{D})$. Значит, ввиду соотношения

$$Tx = T\mathscr{D}x + T(x - \mathscr{D}x) = T\mathscr{D}x,$$

выполненного в силу того, что $\mathscr{D}(x - \mathscr{D}x) = 0$, получаем равенство $T = T\mathscr{D}$.

Для завершения доказательства достаточно установить, что для любого оператора $T \in L^+(X, Y)$ оператор $T\mathcal{D}$ является максимальным в упорядоченности Шоке, порожденной конусом H.

Итак, пусть $Ah \geqslant T\mathcal{D}h$ для $h \in P(H)$. Для функционала $f \in (Y^r)^+$ выполняется

$$A^*f \succ_{P(H)} \Psi(T^*f),$$

т. е. по определению $A^*f = \Psi T^*f$. Следовательно, $A = T\mathcal{D}$. Теорема доказана полностью.

Замечание 8. Нетрудно видеть, что условия, наложенные на размеры конуса $\mathcal{D}[X]$, существенны. Отметим также, что в предположении коинициальности H в Z выполняется

$$\mathrm{Ch}(H, X, Z) = N(\mathcal{D})^d$$

(см. пункт **1.2**). Таким образом удается описать все границы Шоке.

Замечание 9. Каждое широко непрерывное аддитивное выметание Ψ на адаптированном конусе, представляющем наименьшую верхнюю решетку, натянутую на допустимое подпространство H в C_Q, удовлетворяет условиям теоремы 8, поскольку $\Psi^*[C_Q] \supset H$. Таким образом, если пара $(P(H), C_Q)$ обладает CE-свойством, то $(\Psi^*[C_Q], C_Q)$ — симплекс Бауэра. С такой ситуацией мы фактически встретились в примере 4 — пространство гармонических в шаре функций есть перестройка пространства аффинных функций A с помощью барицентрических координат

$$x \longmapsto (\text{гармоническая мера с центром в } x).$$

Поскольку пара $(P(A), C_{\mathfrak{Z}_n})$, очевидно, обладает CE-свойством, то таких перестроек в симплексы Бауэра сколько угодно.

§ 3. ГРАНИЦЫ ШОКЕ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ С АБСТРАКТНОЙ НОРМОЙ

В этом параграфе мы изложим конструкции, позволяющие строить граничную теорию для классов, вообще говоря, не положительных операторов. Именно, мы построим границу Шоке для класса операторов с абстрактной нормой. К этому классу относятся, в частности, непрерывные функционалы в нормированных пространствах и ограниченные операторы, действующие в K-пространства непрерывных функций.

III.3.1. Пусть X — векторное пространство, нормированное посредством векторной решетки Z (см. **I.3.4**).

Пусть H — конус в X, пространство Y является K-пространством и оператор $T \in L(X, Y)$ обладает абстрактной нормой. Оператор T называется *абстрактно максимальным* (точнее, максимальным относительно H в классе операторов с абстрактной нормой), если как только $|T'| \leqslant |T|$ и $T'h \geqslant Th$ для всех $h \in H$, то $T' = T$. Здесь T' — линейный оператор из X в Y, обладающий абстрактной нормой.

Введем в пространство $X \times Z$ отношение порядка с помощью конуса

$$(X \times Z)^+ = \{(x, z) \in X \times Z : |x| \leqslant z\}.$$

Полученное упорядоченное пространство называют *порядковой надстройкой* X.

I. *Конус* $H_Z = H \times (-Z^+)$ *коинициален порядковой надстройке.*

В самом деле, элемент $(x, z) \in X \times Z$ имеет своей нижней границей элемент $(0, -|x| - |z|)$.

В силу предложения I и предложения II пункта **1.3** на конусе H_Z существуют максимальные операторы. Покажем, что такие операторы тесно связаны с абстрактно максимальными операторами.

Теорема 9(3.III). *Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *Оператор T является абстрактно максимальным.*

(2) $\mathrm{Ch}(H_z, (T, |T|)) = Y$.

(3) $\mathrm{Ch}(H \times Z, (T, |T|)) = Y$.

(4) *Для любого элемента $x \in X$ выполняется*

$$Tx = \sup_{h \in H} (Th - |T| \, |x - h|).$$

Здесь оператор $(T, |T|) : X \times Z \to Y$ действует по формуле

$$(T, |T|) : (x, z) \to Tx + |T| z.$$

Доказательство. $(1) \Rightarrow (2)$. Пусть оператор $T' \in L^+(X \times Z, Y)$ мажорирует $(T, |T|)$ в упорядоченности $\succ_{H_Z}$. Имеем

$$T'(h, 0) \geqslant (T, |T|)(h, 0) = Th \qquad (h \in H);$$

$$T'(0, z) \leqslant (T, |T|)(0, z) = |T| z \qquad (z \in Z^+).$$

Если $(x, z) \in (X \times Z)^+$, то $T'(x, z) = T'(x, 0) + T'(0, z) \geqslant 0$. В частности, для всех $x \in X$ выполняется оценка $T'(x, 0) \geqslant -|T||x|$. Таким образом, оператор $T'(\cdot, 0): x \to T'(x, 0)$ обладает абстрактной нормой, не превосходящей $|T|$. Значит, $T'(\cdot, 0) = T$. Поскольку оператор $T'(0, \cdot)$ мажорирует абстрактную норму оператора $T'(\cdot, 0)$, то $T'(0, \cdot) = |T|$. Итак,

$$T'(x, z) = T'(x, 0) + T'(0, z) = Tx + |T|z = (T, |T|)(x, z),$$

т. е. $(T, |T|)$ максимален относительно H_Z. Иными словами, единичный проектор в Y является $(T, |T|)$-максимальным.

(2) $\Rightarrow$ (3). Поскольку $H_Z \subset H \times Z$, то справедлива оценка

$$\operatorname{Ch}(H_Z, (T, |T|)) \subset \operatorname{Ch}(H \times Z, (T, |T|)).$$

(3) $\Rightarrow$ (4). В силу предложения VIII из **1.3** выполняется

$$(T, |T|) = q_{H \times Z, (T, |T|)}.$$

В частности, для элемента $x \in X$ имеем

$$\begin{aligned} Tx &= (T, |T|)(x, 0) = q_{H \times Z, (T, |T|)}(x, 0) = \\ &= \sup\{(T, |T|)(h, z) : (h, z) \leqslant (x, 0),\ h \in H,\ z \in Z\} = \\ &= \sup\{Th - |T|z : |x - h| \leqslant z,\ h \in H,\ z \in Z^+\} \leqslant \\ &\leqslant \sup_{h \in H}(Th - |T||x - h|) \leqslant Tx + \\ &+ \sup_{h \in H}(T(h - x) - |T||x - h|) \leqslant Tx, \end{aligned}$$

поскольку $T(h - x) \leqslant |T(h - x)| \leqslant |T||x - h|$.

(4) $\Rightarrow$ (1). Если $T'h \geqslant Th$ для $h \in H$ и $|T'| \leqslant |T|$, то

$$Tx = \sup_{h \in H}(Th - |T||x - h|) \leqslant \sup_{h \in H}(T'h - |T'||x - h|) \leqslant T'x$$

по определению абстрактной нормы. Итак, $T' = T$, т. е. T — абстрактно максимальный оператор.

III.3.2. Следует иметь в виду, что абстрактно максимальные операторы зачастую заполняют достаточно «разреженное» множество. Точнее, сумма таких операторов, вообще говоря, не максимальна. Одной из причин этого служит то обстоятельство, что конус H_Z за исключением тривиальных случаев не фильтруется по возрастанию.

Возникает следующий вопрос: как устроены суммы абстрактно максимальных операторов? Теорема декомпозиции подсказывает путь анализа — нужно попытаться отождествить абстрактно максимальные операторы с максимальными операторами в векторных решетках. Ясно, что указанный в теореме 9 переход к порядковой надстройке для этой цели не пригоден. Однако для наиболее важных в приложениях случаев — случая нормирования векторной решетки ограниченных элементов числовой прямой (случая «сохраняющей нормы теоремы Шоке») и случая нормирования векторной решетки ею самой (т. е. ситуацией, в которой оператор однозначно определяется в классе операторов с заданным модулем), можно устроить более простое описание абстрактно максимальных операторов с помощью процедуры «удвоения границы». Нам будет удобно вести построения одновременно для обоих указанных случаев.

Итак, пусть пространство X снабжено структурой векторной решетки и *абстрактная норма монотонна*, т. е. если $|x_1| \leqslant |x_2|$, то $|x_1| \leqslant |x_2|$. Для простоты будем считать, что все операторы из $L^r(X, Y)$ обладают абстрактной нормой. Заметим, что в нашем случае абстрактная норма оператора также оказывается монотонной.

Конус H_0 в X^+ назовем *определяющим*, если для любых операторов $T_1, T_2 \in L^+(X, Y)$ выполняется

$$|T_1| \geqslant |T_2| \Leftrightarrow T_1 >_{H_0} T_2.$$

Отметим, что если $X=Z$, то определяющим конусом служит X^+, а если X — архимедова векторная решетка ограниченных элементов и $|\cdot|$ есть каноническая норма, порожденная сильной единицей $\mathbf{1}$, то определяющим конусом служит луч $(\alpha \mathbf{1})_{\alpha \in R^+}$.

Положим

$$(H, H_0) = \{(h - h_0, -h - h_0) \in X \times X : h \in H, h_0 \in H_0\}.$$

I. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *Оператор $T \in L^r(X, Y)$ является абстрактно максимальным.*

(2) $\mathrm{Ch}((H, H_0), (T^+, T^-)) = Y$, *где* $(T^+, T^-) : (x, y) \to T^+x + T^-y$.

Установим (1) $\Rightarrow$ (2). Для этого рассмотрим произвольный оператор $T_1 \in \mathrm{Spr}((T^+, T^-), (H, H_0))$. Положим $T' = T_1(\cdot, 0) - T_1(0, \cdot)$. Ясно, что T' — регулярный оператор, причем для $h \in H$ и $h_0 \in H_0$ выполняется

$$T'h = T_1(h, -h) \geqslant (T^+, T^-)(h, -h) = Th;$$

$$|T'|h_0 \leqslant T_1(h_0, 0) + T_1(0, h_0) \leqslant (T^+, T^-)(h_0, h_0) = |T|h_0.$$

Таким образом, $|T'| \leqslant \| T' \| \leqslant |T|$ и, следовательно, $T' = T$. Отсюда следует, что $T_1(\cdot, 0) \geqslant T^+$ и $T_1(0, \cdot) \geqslant T^-$. Поскольку

$$0 \leqslant (T_1(h_0, 0) - T^+h_0) + (T_1(0, h_0) - T^-h_0) \leqslant 0,$$

то $|T_1(\cdot, 0) - T^+| = |T_1(0, \cdot) - T^-| = 0$. Значит, $T_1 = (T^+, T^-)$.

Проверим теперь импликацию (2) $\Rightarrow$ (1). Пусть $T_1 h \geqslant Th$ для $h \in H$ и $|T_1| \leqslant |T|$. Тогда $\| T_1 \| \leqslant \| T \|$ и, следовательно, $|T_1| h_0 \leqslant |T| h_0$ для $h_0 \in H_0$. Рассмотрим оператор (T_1^+, T_1^-). Имеем

$$(T_1^+, T_1^-)(h - h_0, -h - h_0) = T_1 h - |T_1| h_0 \geqslant$$

$$\geqslant Th - |T| h_0 = (T^+, T^-)(h - h_0, -h - h_0).$$

Следовательно, ввиду условия $(T_1^+, T_1^-) = (T^+, T^-)$ и, значит, выполняется $T_1 = T$.

II. *Пусть $T_1, T_2 \in L^+(X, Y)$. Если оператор*

$$\langle T_1, T_2 \rangle : (x, y) \to (T_1 x, T_2 y)$$

из $L^+(X \times X, Y \times Y)$ является максимальным относительно конуса (H, H_0), то T_1 — абстрактно максимален относительно конуса H, а оператор T_2 — абстрактно максимален относительно конуса $-H$.

Проверим указанный факт только для оператора T_2. По предложению V пункта **1.3** оператор $\langle 0, T_2 \rangle$ максимален относительно (H, H_0). Значит, по предложению I оператор $-T_2$ абстрактно максимален относительно H, ибо

$$T_2 y = (0, T_2)(x, y) = q_{(H, H_0), (0, T_2)}(x, y).$$

Окончательно, по теореме 9 получаем

$$T_2 x = \sup_{h \in H} (-Th - |T| |x + h|) = \sup_{h \in -H} (Th - |T| |x - h|).$$

Таким образом, оператор T_2 является абстрактно максимальным относительно конуса $-H$.

С помощью приведенных предложений можно перейти к построению границы Шоке.

Итак, пусть Z_1 — некоторое K-пространство, содержащее X. Рассмотрим проектор P_{Ch} на компоненту

$$\mathrm{Ch}((H, H_0), X \times X, Z_1 \times Z_1).$$

Ясно, что оператор $(z, 0) \to P_{\mathrm{Ch}}(z, 0)$ действует в $Z_1 \times \times \{0\}$, а оператор $(0, z) \to P_{\mathrm{Ch}}(0, z)$ действует в $\{0\} \times Z_1$. Определим проекторы P^1_{Ch} и P^2_{Ch} в пространстве Z_1 соотношениями

$$(P^1_{\mathrm{Ch}} z, 0) = P_{\mathrm{Ch}}(z, 0); \quad (0, P^2_{\mathrm{Ch}} z) = P_{\mathrm{Ch}}(0, z).$$

Тогда, очевидно, выполняется $P_{\mathrm{Ch}} = \langle P^1_{\mathrm{Ch}}, P^2_{\mathrm{Ch}} \rangle$.

III. *Проектор* P^1_{Ch} (*соответственно* P^2_{Ch}) *является наибольшим абстрактно надмаксимальным проектором относительно конуса* H (*соответственно* $-H$).

Проведем доказательство только для проектора P^1_{Ch}. По предложению II оператор P^1_{Ch} сужается на X в абстрактно максимальный оператор. Пусть теперь $P: Z_1 \to Z_1$ — проектор, сужение которого на X абстрактно максимально. По предложению I оператор $(P, 0): Z_1 \times Z_1 \longrightarrow Z_1$ надмаксимален. Пусть оператор $i_1: Z_1 \longrightarrow Z_1 \times Z_1$ есть вложение $i_1: z \to (z, 0)$. Этот оператор сохраняет т. в. г. произвольных множеств, причем диаграмма

$$\begin{tikzcd}
Z_1 \times Z_1 \arrow[d, "\langle P, 0 \rangle"'] & & Z_1 \arrow[ll, "i_1"'] \\
Z_1 \times Z_1 \arrow[urr, "(P, 0)"'] & &
\end{tikzcd}$$

коммутативна и, следовательно, оператор $\langle P, 0 \rangle$ максимален относительно (H, H_0). Значит, $\langle P, 0 \rangle \leqslant P_{\mathrm{Ch}}$, т. е. $P \leqslant P^1_{\mathrm{Ch}}$.

В качестве следствия предложения III получается

IV. *Если* H — *подпространство, то* $P^1_{\mathrm{Ch}} = P^2_{\mathrm{Ch}}$.

Таким образом, в случае операторов с абстрактной нормой границей Шоке служит пара проекторов $\langle P^1_{\mathrm{Ch}}, P^2_{\mathrm{Ch}} \rangle$. Рассмотрим для простоты случай, когда H — подпространство. В этом случае компоненту, отвечающую проектору $P^1_{\mathrm{Ch}} = P^2_{\mathrm{Ch}}$, естественно называть *абстрактной границей Шоке* подпространства H.

V. *Сужение абстрактно надмаксимального оператора на дизъюнктное дополнение абстрактной границы Шоке анормально.*

Действительно, в силу теоремы об анормальности и теоремы 9 положительная и отрицательная части абстрактно надмаксимального оператора обращаются в нуль на одном и том же фундаменте дополнения границы Шоке.

§ 4. ГРАНИЧНОЕ ПОВЕДЕНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В этом параграфе мы выделим и изучим специальный класс операторов, носители которых играют роль. аналогичную роли экстремальных подмножеств выпуклого множества. Этот класс составляют так называемые экстремальные операторы — объекты, которые при соответствующем выборе параметров, участвующих в их определении, представляют большинство известных экстремальных образований — грани выпуклого множества, грани, связанные с конусом функций, минимальные грани ограниченных функционалов в нормированных пространствах и многое другое.

III.4.1. Пусть H — конус в упорядоченном векторном пространстве X. Для простоты в дальнейшем считается, что H — верхняя решетка в векторной решетке X. Это допущение для многих результатов не существенно, но приводит к сокращению формулировок. Пусть, далее, Y — некоторое K-пространство и L — некоторая компонента в K-пространстве $L^r(H, Y)$.

Оператор $T \in L^+(X, Y)$ называется *экстремальным* (в L относительно конуса H), если для всякого $S \in L^+$ такого, что $S \succ_H T$, выполняется $N(S) \supset N(T)$, где, как обычно, $N(T) = \{x \in X : T|x| = 0\}$ — нулевая решетка оператора T. Множество всех экстремальных операторов обозначается $\mathfrak{E}(H, L)$ или просто $\mathfrak{E}$, если нет сомнений, о каких H и L идет речь.

Напомним, что множество U в условно полной решетке Z называется *правильным вверх*, если для всякого ограниченного сверху в Z подмножества $U_0 \subset U$ выполняется $\sup U_0 \in U$. Аналогичным образом определяются *правильные вниз* множества. Множество называется *правильным*, если оно правильно вверх и вниз.

Основным результатом текущего пункта является следующее утверждение[4].

Теорема 10 (4.III). *Множество $\mathfrak{C}$ является правильным вверх конусом в К-пространстве $L^r(X, Y)$.*

Прежде чем доказать эту теорему, установим представляющий самостоятельный интерес вариант теоремы декомпозиции, который понадобится нам и в дальнейшем. Предварительно введем определение.

Пусть $[\omega_0, \omega_1]$ — отрезок некоторого вполне упорядоченного множества. Возрастающее отображение $\omega \longrightarrow T(\omega)$ множества $[\omega_0, \omega_1]$ в условно полную решетку называется *согласованным*, если $T(\omega) = \sup T[\omega_0, \omega)$ как только $\omega = \sup[\omega_0, \omega)$, т. е. как только ω — предельный трансфинит.

Лемма о согласованных разбиениях. *Пусть $\omega \longmapsto T(\omega)$ — согласованное семейство операторов из $L^+(X, Y)$ и оператор $S \in L^+(X, Y)$ таков, что $S \succ_H T(\omega_1)$. Тогда существует согласованное семейство $\omega \longmapsto S(\omega)$ операторов из $L^+(X, Y)$ такое, что*

$$S \geqslant S(\omega);\ S(\omega) \succ_H T(\omega);$$
$$S - S(\omega) \succ_H T(\omega_1) - T(\omega)$$

для всех $\omega \in [\omega_0, \omega_1]$.

Доказательство. Требуемое построение будем вести индуктивно.

Поскольку $T(\omega_1) \geqslant T(\omega_0)$, то по теореме декомпозиции найдется оператор $S_0 \in L^+(X, Y)$ такой, что

$$S \geqslant S_0;\ S \succ_H T(\omega_0);\ S - S_0 \succ_H T(\omega_1) - T(\omega_0).$$

Полагаем $S(\omega_0) = S_0$.

Пусть теперь отображение $\omega \longmapsto S(\omega)$ определено в интервале $[\omega_0, \omega)$ и обладает там требуемыми свойствами. Если ω — предельный трансфинит, то полагаем $S(\omega) = \sup S[\omega_0, \omega)$. Поскольку для всех $x \in X$

$$S(\omega)x = (o)\text{-}\lim_{\omega'} S(\omega')x;$$
$$T(\omega)x = (o)\text{-}\lim_{\omega'} T(\omega')x,$$

---

[4] Простоты ради считаем, что $0 \in \mathfrak{C}$.

то отображение $\omega \longrightarrow S(\omega)$ удовлетворяет требуемым неравенствам в интервале $[\omega_0, \omega)$.

Допустим теперь, что число ω не предельное и ω' — непосредственно предшествующий трансфинит, т. е. $\omega' = \sup[\omega_0, \omega)$. Для элемента ω' по допущению выполняются заключения доказываемой леммы, при этом $T(\omega_1) - T(\omega') \geqslant T(\omega) - T(\omega')$. Значит, по теореме декомпозиции найдется оператор $S_\omega \in L^+(X, Y)$ такой, что

$$S - S(\omega') \geqslant S_\omega; \quad S_\omega \succ_H T(\omega) - T(\omega');$$
$$S - S(\omega') - S_\omega \succ_H T(\omega_1) - T(\omega).$$

Полагаем $S(\omega) = S(\omega') + S_\omega$. Очевидно, что для оператора $S(\omega)$ выполняются необходимые неравенства. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 10. Установим сначала, что $\mathfrak{C}$ — конус. Поскольку соотношение $\alpha\mathfrak{C} \subset \mathfrak{C}$ для $\alpha > 0$ очевидно, следует проверить включение $\mathfrak{C} + \mathfrak{C} \subset \mathfrak{C}$.

Пусть $T_1, T_2 \in \mathfrak{C}$. Если $S \succ_H T_1 + T_2$, то по теореме декомпозиции найдутся операторы $S_1, S_2 \in L^+(X, Y)$ такие, что $S = S_1 + S_2$ и, кроме того, $S_1 \succ_H T_1$ и $S_2 \succ_H T_2$. Имеем

$$N(T_1 + T_2) \subset N(T_1) \cap N(T_2) \subset$$
$$\subset N(S_1) \cap N(S_2) \subset N(S_1 + S_2).$$

Таким образом, $T_1 + T_2 \in \mathfrak{C}$.

Перейдем теперь к доказательству правильности вверх конуса $\mathfrak{C}$. Прежде всего проверим, что $\mathfrak{C}$ — верхняя решетка. Если $T_1, T_2 \in \mathfrak{C}$ и $S \succ_H T_1 \vee T_2$, то

$$S + T_1 + T_2 - T_1 \vee T_2 \succ_H T_1 + T_2.$$

Таким образом,

$$N(T_1 \vee T_2) \subset N(T_1 + T_2) \subset N(S).$$

Пусть теперь $(T_\omega)_{\omega \in \Omega}$ — ограниченное сверху семейство элементов из $\mathfrak{C}$ и $T = \sup\{T_\omega : \omega \in \Omega\}$. Не нарушая общности, будем считать, что Ω вполне упорядочено и $\omega_0 = \inf \Omega$. Присоединим к Ω наибольший элемент ω_1. Ясно, что $\Omega \cup \{\omega_1\} = [\omega_0, \omega_1]$. Определим теперь отображение $\omega \longrightarrow T(\omega)$ отрезка $[\omega_0, \omega_1]$ в $L^+(X, Y)$ индуктивным образом.

Положим $T(\omega_0) = T_{\omega_0}$. Если ω — предельный трансфинит, то полагаем $T(\omega) = \sup T[\omega_0, \omega)$. Если же ω — не предельно, а ω' непосредственно предшествует ω, то считаем, что $T(\omega)=T(\omega')\vee T_\omega$. Ясно, что отображение $\omega\longrightarrow T(\omega)$ согласовано, причем $T(\omega_1)=T$.

Докажем, что все операторы $T(\omega)$ экстремальны. Допустим для этого, что $T(\omega')\in\mathfrak{E}$ для всех $\omega'\in[\omega_0, \omega)$. Если ω — не предельное число, то оператор $T(\omega)$ экстремален в силу ранее доказанного. Рассмотрим случай, когда ω — предельный трансфинит.

Возьмем $S\succ_H T(\omega)$. По лемме о согласованных разбиениях найдется согласованное семейство $\omega\longmapsto S(\omega)$, определенное на отрезке $[\omega_0, \omega]$ и удовлетворяющее там заключению леммы. Если $T(\omega)x=0$ для некоторого $x\in X^+$, то $T(\omega')x=0$ и $S(\omega')x=0$ для $\omega'\in[\omega_0, \omega)$. Отсюда следует, что $S(\omega)x=0$. Кроме того, $S-S(\omega)\succ_H \succ_H T(\omega)-T(\omega)$, так что $S-S(\omega)+T(\omega_0)\succ_H E(\omega_0)$, т. е. $(S-S(\omega))=0$. Окончательно получаем, что $N(S)\supset \supset N(T(\omega))$. Таким образом, выполняется $T(\omega\in\mathfrak{E}$. Для завершения доказательства достаточно сослаться на принцип трансфинитной индукции. Теорема доказана.

Замечание 1. Конус $\mathfrak{E}$ не обязан быть правильным вниз множеством, более того, этот конус вообще говоря, не является даже нижней решеткой. Отметим, что простейшим независящим от H достаточным условием решеточности служит нормальная вложимость X в K-пространство $L^r(L^r(X, Y), Y)$. Последнее свойство, как видно, эквивалентно тому, что X является K-пространством, все операторы из $L^+(X, Y)$ с необходимостью (o)-непрерывны, причем операторы T_1, $T_2\in L^+(X, Y)$ дизъюнктны в том и только в том случае, если дизъюнктны компоненны $N(T_1)^d$ и $N(T_2)^d$ их существенной положительности. Эти свойства заведомо выполнены, если положительные функционалы на K-пространстве X являются (o)-непрерывными и $Y=\mathbf{R}$. При $Y\neq\mathbf{R}$ обеспечить указанные свойства, вообще говоря, невозможно. В то же время в ряде случаев удается выделить естественную подрешетку в $\mathfrak{E}$.

Итак, пусть X является K-пространством и $Y=X$. Относительно компоненты L в $L^r(X, X)$ предположим, что L содержит *базу* X, т. е. полную булевскую алгебру проекторов на компоненты в X. Символом $\operatorname{Ext}(H, L)$ обозначим множество экстремальных проекторов.

I. *Множество* $\operatorname{Ext}(H, L)$ — *правильная вверх подрешетка базы* X. *Если, кроме того, компонента* L *состоит* *из* (*о*)*-непрерывных операторов, то* $\mathrm{Ext}(H, L)$ — *правильная подрешетка базы* X.

Проверим сначала, что $\mathrm{Ext}(T, L)$ — нижняя решетка. Для этого, прежде всего, отметим, что $P \in \mathrm{Ext}(H, L)$ в том и только в том случае, если для всякого $S \in L^+$ такого, что $S \succ_H P$, выполняется $SP = S$. Действительно, если выполнено указанное условие, то $N(S) \supset N(P)$. Если же известно, что $N(S) \supset N(P)$, то $S_x = SP^d x + SPx = SPx$ для всякого $x \in X$, поскольку $P^d x \in N(P)$.

Итак, пусть $P_1, P_2 \in \mathrm{Ext}(H, L)$ и $S \succ_H P_1 \wedge P_2$. Поскольку по теореме 10 выполняется $P_1 \vee P_2 \in \mathrm{Ext}(H, L)$, то

$$SP_1 = S; \quad SP_2 = S; \quad S(P_1 \vee P_2) = S.$$

Отсюда непосредственно вытекает, что

$$S(P_1 \wedge P_2) = S(P_1 + P_2 - P_1 \vee P_2) = S.$$

Таким образом, $P_1 \wedge P_2 \in \mathrm{Ext}(H, L)$.

Перейдем теперь к доказательству второй части предложения. Пусть (P_ω) — семейство экстремальных проекторов и $P = \inf(P_\omega)$. Не нарушая общности, можно считать, что семейство (P_ω) фильтруется по убыванию. Если $S \succ_H P$, то $S + P_\omega - P \succ_H P_\omega$, так что $SP_\omega = S$. Следовательно,

$$S = \inf(SP_\omega) = S \inf(P_\omega) = SP,$$

поскольку оператор S по условию (*о*)-непрерывен. Оставшаяся часть предложения содержится в теореме 10.

Замечание 2. Последнее предложение может служить основой различного рода топологических рассмотрений в связи с экстремальными проекторами. В самом деле, на базе пространства X возникает естественный оператор топологического замыкания. Особенно интересен случай, когда X — дискретное K-пространство — фундамент в произведении прямых $\mathbf{R}^Q$, а компонента L содержится в компоненте (*о*)-непрерывных операторов. Объявим замкнутыми в Q в точности множества, отвечающие проекторам из $\mathrm{Ext}(H, L)$. Соответствующая топология в Q называется *экстремальной* или *сильнейшей граневой топологией*. Очевидно, что эта топология совпадает с правой интервальной топологией некоторого однозначно определенного предпорядка на Q. В теории Шоке часто интересуются *граневым строением* выпуклого множества Q. Последнее при соответствующих H, L

и X есть в точности фактор-множество Q по отношению эквивалентности, связанному с указанным предпорядком.

III.4.2. Нетрудно понять, что введенный в предыдущем пункте класс объектов охватывает ряд экстремальных образований. В то же время многие важные объекты — например, граница Шоке или грань конуса в смысле Мейе — не являются экстремальными операторами в буквальном смысле слов. Дело в том, что в указанных случаях интересуются операторами, определенными на более широком, чем X, пространстве и снижаемыми до экстремальных операторов на X. Последняя ситуация, как мы видели, доставляет многие технические удобства.

Итак, в соответствии с изложенным рассмотрим некоторое K-пространство Z и фиксируем положительный оператор $T_0 \in L^+(X, Z)$. Изучение экстремальных операторов, как и обычно в теории Шоке, мы будем вести с помощью подъема на K-пространство Z. Именно, если H — верхняя решетка в X и L — компонента в $L^r(X, Y)$, то оператор $T \in L^+(Z, Y)$ называется *T_0-экстремальным* (в L относительно конуса H), если композиция TT_0 входит в $\mathfrak{E}(H, L)$. Множество T_0-экстремальных операторов обозначается $\mathfrak{E}(T_0)$ или в развернутом виде $\mathfrak{E}(T_0, H, L)$.

Для изучения свойств операторов класса $\mathfrak{E}(T_0)$ мы введем специальные достаточно просто устроенные компоненты операторов, объединение которых покрывает $\mathfrak{E}(T_0)$. Указанные операторы, встречавшиеся нам в § 1, представляют значительный самостоятельный интерес, являясь наиболее широким классом объектов, для которых возможна граничная теория.

Оператор $T \in L^+(Z, Y)$ называется *(T_0, H_0)-согласованным* (относительно конуса H в X) или просто *T_0-согласованным*, если для всякого $S \in L^+(X, Y)$ такого, что $S \succ_H TT_0$ выполняется $S \succ_{H_0} TT_0$ для конуса H_0 в X. Множество регулярных операторов T таких, что $|T|$ является T_0-согласованным, обозначается $\mathfrak{B}_{H_0}(T_0, Y)$.

Операторы класса $\mathfrak{B}_{H_0}(T_0, Y)$ устроены аналогично T_0-граничным в смысле Шоке операторам. Отметим, что $\mathfrak{B}(T_0, Y) = \mathfrak{B}_X(T_0, Y)$.

I. *Множество $\mathfrak{B}_{H_0}(T_0, Y)$ не пусто в том и только в том случае, если $\overline{H + X^+} \supset H_0$.*

В дальнейшем, не оговаривая этого особо, мы будем рассматривать лишь случай, когда $\mathfrak{B}_{H_0}(T_0, Y) \neq \varnothing$.

II. *Множество* $\mathfrak{B}_{H_0}(T_0, Y)$ *является компонентой в* $L^r(Z, Y)$.

Доказательства этих предложений можно получить также, как доказательства аналогичных фактов для максимальных операторов в § 1. При этом при проверке правильности $\mathfrak{B}_{H_0}(T_0, Y)$ следует воспользоваться леммой о согласованных разбиениях.

В силу предложения II в $\mathfrak{B}_{H_0}(T_0, Z)$ существует наибольший T_0-согласованный проектор. Этот проектор называется *проектором Шоке* (относительно конуса H_0). При этом используется обозначение $P_{\mathrm{Ch}_{H_0}}(T_0)$. Область значений указанного проектора называют *компонентой Шоке* или *границей Шоке* (относительно H_0) и обозначают $\mathrm{Ch}_{H_0}(T_0)$. Заметим, что для обычной границы Шоке выполняется $\mathrm{Ch}(T_0) = \mathrm{Ch}_X(T_0)$.

В теории Шоке существенной является теорема об анормальности максимальных операторов. Аналогичный факт справедлив и для согласованных операторов, однако его доказательство несколько сложнее.

Теорема 11 (4.III). *Сужение T_0-согласованного оператора на дизъюнктное дополнение границы Шоке анормально. При этом граница Шоке есть дизъюнктное дополнение общей части ядер всех T_0-согласованных операторов, определенных на K-пространстве Z.*

Доказательство. Несложно убедиться, что общая часть ядер всех T_0-согласованных операторов совпадает с множеством N — общей частью нулевых решеток таких операторов. Кроме того, по определению $N^d \supset \mathrm{Ch}_{H_0}(T_0)$. Значит, для завершения доказательства следует проверить только, что проектор P_{N^d} на компоненту N^d является T_0-согласованным.

Итак, пусть $S >_H P_{N^d} T_0$ и для некоторого $h_0 \in H_0$ не выполнено неравенство $S h_0 \geqslant P_{N^d} T_0 h_0$. Тогда в силу теоремы о реализации K-пространств найдется проектор P_0 в Z, для которого $P_0 P_{N^d} T_0 h_0 > P_0 S h_0$. При этом для всякого T_0-согласованного оператора T выполняется

$$T P_0 S >_H T P_0 P_{N^d} T_0.$$

В силу теоремы 11 оператор $TP_0P_{N^d}$ является T_0-согласованным. Следовательно,

$$0 \leqslant TP_0Sh_0 - TP_0P_{N^d}T_0h_0 \leqslant 0.$$

Итак, $P_0P_{N^d}T_0h_0 - P_0Sh_0 \in N$, откуда вытекает равенство

$$P_{N^d}P_0P_{N^d}T_0h_0 - P_{N^d}P_0Sh_0 = 0.$$

Иными словами, $P_0(P_{N^d}T_0 - P_{N^d}S)h_0 = 0$. Кроме того, $P^d_{N^d}S \succ_H 0$, так что $P^d_{N^d}Sh_0 \geqslant 0$. Значит, $P_0(P_{N^d}T_0h_0 - - Sh_0) \leqslant 0$.

Полученное противоречие означает, что $S \succ_{H_0} P_{N^d}T_0$. Таким образом, $N^d \subset \mathrm{Ch}_{H_0}(T_0)$. Теорема доказана.

III.4.3. С помощью приведенной теоремы оказывается возможным достаточно полно описать граничное поведение T_0-экстремальных операторов в случае, когда $L = L^r(X, Y)$. Дело в том, что при этом предположении оператор T является T_0-экстремальным в том и только в том случае, если этот оператор является $(T_0, N(TT_0))$-согласованным.

Итак, в этом пункте мы считаем, что $L = L^r(X, Y)$.

I. *Множество $\mathfrak{E}(T_0)$ является правильным вверх конусом в пространстве $L^r(Z, Y)$.*

Проверим, что $\mathfrak{E}(T_0)$ — верхняя решетка. Если $T_1, T_2 \in \mathfrak{E}(T_0)$ и $S \succ_H (T_1 \vee T_2)T_0$, то ввиду соотношений

$$T_1T_0 + T_2T_0 \geqslant (T_1 \vee T_2)T_0 \geqslant T_1T_0 \vee T_2T_0$$

и теоремы 10 имеем включения

$$N(S) \supset N(T_1T_0 + T_2T_0) \supset N((T_1 \vee T_2)T_0).$$

Остальные свойства $\mathfrak{E}(T_0)$ проверяются аналогичным образом.

II. *Сужение T_0-экстремального оператора T на дизъюнктное дополнение границы Шоке $\mathrm{Ch}_{N(TT_0)}(T_0)$ анормально.*

Это предложение немедленно следует из теоремы 11.

III. *Проектор на компоненту Шоке $\mathrm{Ch}_{N(TT_0)}(T_0)$ является T_0-экстремальным для всякого (o)-непрерывного T_0-экстремального оператора T.*

Пусть P — проектор Шоке на компоненту $\mathrm{Ch}_{N(TT_0)}(T_0)$ и $S \succ_H PT_0$. Тогда по условию $N(S) \supset N(TT_0)$.

Так как в свою очередь выполняется $N(TT_0)=$ $=N(P_T T_0)$, где P_T — проектор на компоненту существенной положительности T, и, кроме того, $P_T \geqslant P$, то $N(S) \supset N(PT_0)$.

IV. *Если $T \in \mathfrak{E}(T_0)$ и T является (o)-непрерывным, то проектор P_T на компоненту существенной положительности T является T_0-экстремальным.*

В силу теоремы 11 имеем, что $N(T) \supset \mathrm{Ch}_{N(TT_0)}(T_0)^d$. Значит, проектор P_T мажорируется проектором $P_{\mathrm{Ch}_{N(TT_0)}(T_0)}$. Осталось воспользоваться предложением III.

V. *Если конус H коинициален X, то (o)-непрерывный оператор T входит в $\mathfrak{E}(T_0)$ в том и только в том случае, если $P_T \in \mathfrak{E}(T_0)$.*

Для доказательства достаточности приведенного условия заметим, что экстремальность оператора $T \in L^+(X, Y)$ относительно коинициального конуса H в X равносильна выполнению соотношения

$$q_{H,T} = q_{H(T),T},$$

где $H(T) = H + N(T)$. Этот факт следует из предложения VI пункта **1.3.**

Допустим, что проектор P_T входит в $\mathfrak{E}(T_0)$. Тогда для всех $x \in X$ выполняется

$$\sup\{P_T T_0 h : h \in H,\ h \leqslant x\} = \sup\{P_T T_0 h : h + h' \leqslant x,\ h \in H,\ h' \in N(TT_0)\}.$$

Иными словами,

$$T\sup\{T_0 h : h \in H,\ h \leqslant x\} = T\sup\{T_0 h : h + h' \leqslant x,\ h \in H,\ h' \in N(TT_0)\}.$$

Множества, стоящие под знаком супремума в левой и правой частях последнего равенства, фильтруются по возрастанию. Таким образом, выполняется

$$q_{H,TT_0} = q_{H(TT_0),TT_0},$$

что по отмеченному ранее и означает T_0-экстремальность оператора T.

III.4.4. Приведем характеристики еще одного интересного класса экстремальных операторов. Именно, рассмотрим конус

$$\mathfrak{E}(T_0, H, \mathfrak{B}(Y)),$$

где $\mathfrak{B}(Y)$ — компонента граничных в смысле Шоке операторов. Этот класс обозначается $\mathfrak{E}_s(T_0)$. Операторы из

$\mathfrak{E}_s(T_0)$ называются *сверхэкстремальными* (в $L^r(X, Y)$ относительно H). Указанное название связано с очевидным включением $\mathfrak{E}_s(T_0) \supset \mathfrak{E}(T_0)$. Отметим, что последнее включение, вообще говоря, строгое.

I. *Если H коинициален X и (o)-непрерывный оператор T входит в $\mathfrak{E}_s(T_0)$, то $P_T \in \mathfrak{E}_s(T_0)$.*

Пусть $S \in \mathfrak{B}(Y)^+$ и $S \succ_H P_T T_0$. Тогда

$$TS \succ_H T P_T T_0 = T T_0.$$

Имеем для каждого $x \in X$ в силу ранее доказанного

$$TSx = Tq_{H, S}(x) = T\sup\{Sh : h \in H,\ h \leqslant x\} = q_{H, TS}(x),$$

поскольку оператор T является (o)-непрерывным, а множество $S[U_{x, H}]$ фильтруется по возрастанию.

Значит, $TS \in \mathfrak{B}(Y)$ и, следовательно, $N(TS) \supset \supset N(TT_0) = N(P_T T_0)$, что и означает сверхэкстремальность P_T.

II. *Если коинициальный конус H симплициален в X и проектор P_T на компоненту существенной положительности (o)-непрерывного оператора T сверхэкстремален, то $T \in \mathfrak{E}_s(T_0)$.*

Поскольку конус H симплициален, то определено единственное выметание Ψ_H. Несложно убедиться в том, что оператор $T\Psi_H(P_T T_0)$ максимален в упорядоченности Шоке, так что

$$\Psi_H(TT_0) = T\Psi_H(P_T T_0).$$

Итак, если $P_T \in \mathfrak{E}_s(T_0)$, то получается

$$N(\Psi_H(TT_0)) \supset N(T\Psi_H(P_T T_0)) \supset N(TP_T T_0) = N(TT_0).$$

Последнее означает, что $T \in \mathfrak{E}_s(T_0)$.

III.4.5. В этом пункте мы уточним полученные ранее результаты в случае экстремальных мер Радона.

Пусть H — коинициальная верхняя решетка в пространстве C_Q непрерывных функций на метризуемом компакте Q. Говоря об экстремальности (в том или ином смысле) множества в Q, мы будем иметь в виду экстремальность проектора сужения на это множество в пространстве $\mathbf{R}^Q$ относительно естественного вложения $E: C_Q \longrightarrow \mathbf{R}^Q$. При этом в качестве компоненты L выступает пространство $(C_Q)^r$, если речь идет о мерах, или пространство $L^r(C_Q, \mathbf{R}^Q)$, если речь идет об операторах. Положительные меры Радона без оговорок отождествляются с соответствующими регулярными борелевскими мерами. Для меры μ символом $\operatorname{supp}(\mu)$ обозначается ее *носитель*, а через $\operatorname{Ch}(\mu)$ — граница Шоке $\operatorname{Ch}_{N(\mu)}(E)$, построенная относительно подпространства $N(\mu)$ в C_Q. Символом $\operatorname{Ch}(H)$, как обычно, обозначается граница $\operatorname{Ch}_{C_Q}(E)$.

Теорема 12 (4.III). *Мера является экстремальной в том и только в том случае, если ее носитель содержит экстремальное множество полной меры.*

Доказательство. Если носитель $\operatorname{supp}(\mu)$ меры μ содержит экстремальное множество G полной меры и $\nu \succ_H \mu$, то по теореме Харди — Литтлвуда — Полиа [33] найдется слабо измеримое отображение $x \to T_x$, где $T_x \succ_H \varepsilon_x$, такое, что

$$\nu(f) = \int_Q T_x(f)\, d\mu = \int_G T_x(f)\, d\mu \quad (f \in C_Q).$$

Поскольку G — экстремальное множество, то

$$\operatorname{supp}(T_x) \subset \overline{G} \subset \operatorname{supp}(\mu)$$

для всех $x \in G$, так что $\operatorname{supp}(\nu) \subset \operatorname{supp}(\mu)$. Иначе говоря, выполняется $N(\nu) \supset N(\mu)$.

Предположим теперь, что мера μ экстремальна. Прежде всего заметим, что точка x входит в $\operatorname{Ch}(\mu)$ в том и только в том случае, если

$$\operatorname{co}_H f(x) = \operatorname{co}_{H(\mu)} f(x) \quad (f \in C_Q),$$

где co_H, $\operatorname{co}_{H(\mu)}$ — соответствующие операторы взятия выпуклых оболочек. При этом в силу рассуждений пункта 4.3 и регулярности μ выполняется

$$\mu(\operatorname{co}_H f) = \mu(\operatorname{co}_{H(\mu)} f) \quad (f \in C_Q).$$

Заметим, что операторы co_H и $\operatorname{co}_{H(\mu)}$ равномерно непрерывны. Таким образом, если (f_n) — всюду плотная в C_Q последовательность и

$$G_n = \{x \in Q : \operatorname{co}_H f_n(x) = \operatorname{co}_{H(\mu)} f_n(x)\},$$

то выполняются соотношения

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \operatorname{Ch}(\mu); \quad \mu(G_n) = \mu(Q).$$

Таким образом, $\mu(\mathrm{Ch}(\mu))=\mu(Q)=\mu(\mathrm{supp}(\mu))$. Следовательно, мера μ сосредоточена на множестве $\mathrm{Ch}(\mu)\cap\cap\mathrm{supp}(\mu)$.

Пусть теперь $S\in L^+(C(Q),\ \mathbf{R}^Q)$ и S мажорирует в упорядоченности Шоке, порожденной конусом H, проектор сужения на $\mathrm{Ch}(\mu)\cap\mathrm{supp}(\mu)$. Положим $\nu_x: f\to Sf(x)$. Следует проверить, что для положительной функции $f\in C_Q$ такой, что $f(x)=0$ для $x\in\mathrm{Ch}(\mu)\cap\mathrm{supp}(\mu)$, выполняется $Sf=\mathbf{0}$, т. е. $\nu_x(f)=0$ для всех $x\in Q$.

Возьмем сначала $x\in\mathrm{Ch}(\mu)\cap\mathrm{supp}(\mu)$. Поскольку число $\mu(f)$, очевидно, нуль, $\nu_x\succ_H\varepsilon_x$ и $x\in\mathrm{Ch}(\mu)$, то $\nu_x(f)=0$. Если же $x\overline{\in}\mathrm{Ch}(\mu)\cap\mathrm{supp}(\mu)$, то $\nu_x\succ_H\mathbf{0}$ и, следовательно, $\nu_x(f)=0$ тривиальным образом. Итак, $\mathrm{Ch}(\mu)\cap\mathrm{supp}(\mu)$ — экстремальное множество полной меры. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Граница Шоке $\mathrm{Ch}(\mu)$ для экстремальной меры μ обладает на самом деле еще двумя важными свойствами.

Во-первых, сама эта граница является экстремальным множеством. Действительно, если $x\in\mathrm{Ch}(\mu)$ и $x\overline{\in}\mathrm{supp}(\mu)$, то выполняется

$$\mathrm{co}_{H(\mu)}f(x)=f(x)\qquad(f\in C_Q),$$

что означает вхождение $x\in\mathrm{Ch}(H)$. Таким образом,

$$\mathrm{Ch}(\mu)\cap(Q\setminus\mathrm{supp}(\mu))\subset\mathrm{Ch}(H)$$

и, следовательно, часть $\mathrm{Ch}(\mu)$ вне носителя μ является экстремальным множеством. Таким образом, например, по теореме 10 множество $\mathrm{Ch}(\mu)$ экстремально.

Во-вторых $\mathrm{Ch}(\mu)\cap\mathrm{supp}(\mu)$ является наибольшим экстремальным множеством, содержащемся в носителе μ (существование такого множества в общем случае обеспечивает предложение I пункта **4.3**). Действительно, если G — экстремальное множество в $\mathrm{supp}(\mu)$, точка x входит в G и $\nu\succ_H\varepsilon_x$, то $\mathrm{supp}(\nu)\subset\overline{G}\subset\mathrm{supp}(\mu)$. Иными словами, $N(\nu)\supset N(\mu)$. Последнее означает, что $x\in\in\mathrm{Ch}(\mu)$.

Теорема 12 показывает, что носитель экстремальной меры содержит экстремальные множества полной меры. Однако не следует полагать, что сам носитель обязан являться экстремальным множеством. В то же время для некоторых достаточно часто встречающихся конусов дело обстоит иначе.

I. *Если отображение $x \to \mathrm{Spr}(\varepsilon_x, H)$ полунепрерывно снизу в широкой топологии Хаусдорфа, то мера является экстремальной в том и только в том случае, если экстремален ее носитель.*

II. *Если пара (H, C_Q) обладает CE-свойством, то мера является сверхэкстремальной в том и только в том случае, если сверхэкстремален ее носитель.*

Эти предложения устанавливаются аналогичными способами, поэтому мы проверим только справедливость предложения II.

Пусть сначала известно, что $\mathrm{supp}(\mu)$ — сверхэкстремальное множество, а ν — максимальная мера, мажорирующая μ. По теореме Харди — Литтлвуда — Полиа выполняется

$$\nu(f) = \int\limits_Q T_x(f)\, d\mu = \int\limits_{\mathrm{supp}(\mu)} T_x(f)\, d\mu \quad (f \in C_Q)$$

для некоторого слабо измеримого семейства $x \to T_x$, где $T_x \succ_H \varepsilon_x$. Как видно (ср. предложение 13.2 в [57]), мера T_x для почти всех x является максимальной. Так что если $\mu(f) = 0$ для положительной функции f, то функция $x \to T_x(f)$ обращается в нуль почти всюду. Следовательно, $\nu(f) = 0$. Таким образом, мера μ сверхэкстремальна.

Пусть теперь известно, что мера μ сверхэкстремальна. Возьмём точку $x \in \mathrm{supp}(\mu)$ и максимальную меру μ_x такую, что $\mu_x \succ_H \varepsilon_x$. Поскольку пара (H, C_Q) обладает CE-свойством, то можно применить предложение VI пункта **2.3**. По этому предложению существует широко непрерывное аддитивное выметание Ψ такое, что $\Psi\varepsilon_x = \mu_x$. При этом, как легко проверяется прямым вычислением, для всякой функции $f \in C_Q$ выполняется

$$\Psi\mu(f) = \int\limits_Q \Psi\varepsilon_x(f)\, d\mu.$$

Так как $\Psi\mu$ — максимальная мера и $\Psi\mu \succ_H \mu$, то для $f \in N(\mu)$ выполняется $f \in N(\Psi\mu)$. Значит, $\Psi\varepsilon_x(|f|) = 0$ для всех $x \in \mathrm{supp}(\mu)$. В частности, $\mu_x(|f|) = 0$, что и означает сверхэкстремальность $\mathrm{supp}(\mu)$. Предложение доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Alfsen E.** Compact convex sets and boundary integrals. Berlin — Heidelberg — New York, Springer, 1971. 210 p.
2. **Alfsen E., Effros E.** Structure in real Banach spaces.— "Ann. Math.", 1972, v. 96, N 1, p. 98—173.
3. **Amann H.** Fixed points equations and non-linear eigenvalue problems in ordered Banach spaces.— "SIAM Review", 1976, v. 18, № 4, p. 620—709.
4. **Bazaraa H., Shetty C.** Foundations of optimization. Berlin — Heidelberg — New York, Springer, 1976. 193 p.
5. **Bessaga Cz., Pelczynski A.** Selected topics in infinite-dimensional topology. Warszawa, Polish Scientific Publishers, 1975. 353 p.
6. **Birkhoff G.** Lattices in applied mathematics.— In: Proceedings of symposia in pure mathematics. V. II. Providence, Amer. Math. Soc., 1961, p. 155—181.
7. **Bliedtner J., Hansen W.** Simplicial cones in potential theory.— "Inventiones math.", 1975, v. 29, № 2, p. 83—110.
8. **Boboc N., Bucur G.** Conuri convexe de functii continue pe spatii compacte. Bucuresti, Editure academei RSR, 1971. 195 p.
9. **Bonnice W., Silvermann R.** The Hahn — Banach extension and the least upper bound properties are equivalent.— "Proc. Amer. Math. Soc.", 1967, v. 18, № 5, p. 843—850.
10. **Брело М.** Основы классической теории потенциала. М., «Мир», 1964. 212 с.
11. **Брело М.** О топологиях и границах в теории потенциала. М., «Мир», 1974. 224 с.
12. **Бурбаки Н.** Интегрирование. Меры, интегрирование мер. М., «Наука», 1967. 396 с.
13. **Варга Дж.** Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М., «Наука», 1977. 623 с.
14. **Wilhelm J.** Objectives and multi-objective decision making under uncertainty. Berlin — Heidelberg — New York, Springer, 1975. 111 p.
15. **Вулих Б. З.** Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М., ГИФМЛ, 1961. 407 с.
16. **Гольштейн Е. Г.** Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. М., «Наука», 1971. 351 с.
17. **Grossmann M.** Relative Choquet and Silov boundaries.— "J. Reine Angew. Math.", 1967, v. 225, № 1, p. 1—29.
18. **Jameson G.** Ordered linear spaces. Berlin — Heidelberg — New York, Springer, 1970. 194 p.
19. **Демьянов В. Ф.** Минимакс: дифференцируемость по направлениям. Л., Изд. ЛГУ, 1974. 112 с.

20. **Дэй М.** Нормированные линейные пространства. М., ИЛ, 1961. 232 с.
21. **Иоффе А. Д., Левин В. Л.** Субдифференциалы выпуклых функций.— «Тр. Москов. матем. об-ва», 1972, т. 26, с. 3—72.
22. **Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.** Двойственность выпуклых функций и экстремальные задачи.— «Успехи матем. наук», 1968, т. 23, № 6, с. 51—116.
23. **Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.** Теория экстремальных задач. М., «Наука», 1974. 479 с.
24. **Канторович Л. В., Акилов Г. П.** Функциональный анализ. М., «Наука», 1977. 741 с.
25. **Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г.** Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. М.— Л., ГИТТЛ, 1950. 548 с.
26. **Constantinesku C., Cornea A.** Potential theory on harmonic spaces. Berlin — Heidelberg — New York, Springer, 1972. 354 p.
27. **Красносельский М. А., Наймарк М. А., Шилов Г. Е.** Функциональный анализ.— В кн.: Математика в СССР за сорок лет. Т. I. М., ГИФМЛ, 1959, с. 675—779.
28. **Крейн М. Г., Люстерник Л. А.** Функциональный анализ.— В кн.: Математика в СССР за тридцать лет. М.— Л., ГИТТЛ, 1948, с. 608—697.
29. **Кутателадзе С. С.** Границы Шоке в K-пространствах.— «Успехи матем. наук», 1975, т. 30, № 4, с. 107—146.
30. **Кутателадзе С. С.** Формулы для вычисления субдифференциалов.— «Докл. АН СССР», 1977, т. 232, № 4, с. 770—772.
31. **Кутателадзе С. С., Рубинов А. М.** Двойственность Минковского и ее приложения. Новосибирск, «Наука», 1976. 252 с.
32. **Ландкоф Н. С.** Основы современной теории потенциала. М., «Наука», 1966. 515 с.
33. **Левин В. Л.** Выпуклые интегральные функционалы и теория лифтинга.— «Успехи матем. наук», 1975, т. 30, № 2, с. 115—178.
34. **Lindenstrauss J., Tzafriri L.** Classical Banach spaces. Berlin — Heidelberg — New York, Springer, 1973. 243 p.
35. **Лоран П.-Ж.** Аппроксимация и оптимизация. М., «Мир», 1975. 496 с.
36. **Lacey H.** The isometric theory of classical Banach spaces. Berlin — Heidelberg — New York, Springer, 1974. 270 p.
37. **Luxemburg W., Zaanen A.** Riesz spaces. V. I. Amsterdam — London, North — Holland Publ., 1971. 514 p.
38. **Макаров В. Л., Рубинов А. М.** Математическая теория экономической динамики и равновесия. М., «Наука», 1973. 335 с.
39. **Multiple criteria decision making. Kyoto, 1975.** Ed. Zeleny M. Berlin — Heidelberg — New York, Springer, 1976. 345 p.
40. **Multiple criteria decision making. Jouy — en — Josas, France, 1975.** Ed. Thirier H., Zionts S. Berlin — Heidelberg — New York, Springer, 1976. 409 p.
41. **Мейер П.** Вероятность и потенциалы. М., «Мир», 1973. 332 с.
42. **Милютин А. А.** Общие схемы получения необходимых условий экстремума и задачи оптимального управления.— «Успехи матем. наук», 1970, т. 25, № 5, с. 110—116.
43. **Пелчинский А.** Линейные продолжения, линейные усреднения и их применение. М., «Мир», 1970. 144 с.

44. **Пшеничный Б. Н.** Необходимые условия экстремума. М., «Наука», 1969. 151 с.
45. **Ritter K.** Optimization theory in linear spaces. Part III. Mathematical programming in ordered linear spaces.— "Math. Ann.", 1970, v. 184, № 2, p. 133—154.
46. **Рокафеллар Р.** Выпуклый анализ. М., «Мир», 1972. 469 с.
47. **Рубинов А. М.** Сублинейные операторы и их приложения.— «Успехи. матем. наук», 1977, т. 32, № 4, с. 113—174.
48. **Селигмен Б.** Основные течения современной экономической мысли. М., «Прогресс», 1968. 600 с.
49. **Semadeni Z.** Banach spaces of continuous functions. V. I. Warszawa, Polish Scientific Publishers, 1971. 584 p.
50. **Смейл С.** Глобальный анализ и экономика. I. Оптимум Парето и обобщение теории Морса.— «Успехи матем. наук», 1972, т. 27, № 3, с. 177—187.
51. **Smale S.** Global analysis and economics. III. Pareto optima and price equilibria.— "J. Math. Economics", 1974, v. 1, № 2,
52. **Стейн И.** Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М., «Мир», 1973. 342 с.
53. **Теория операторов в функциональных пространствах.** Под ред. Акилова Г. П. Новосибирск, «Наука», 1977. 344 с.
54. **Тихомиров В. М.** Некоторые вопросы теории приближений. М., изд. МГУ, 1976. 304 с.
55. **Facial structure of compact convex sets and application. NATO Advanced study institute.** Ed. Ellis A. Swansea, University College of Swansea, 1972. 147 p.
56. **To T.-O.** The equivalence of the least upper bound property and the Hahn — Banach extension property in ordered vector spaces.— "Proc. Amer. Math. Soc.", 1971, v. 30, № 2, p. 287—296.
57. **Фелпс Р.** Лекции о теоремах Шоке. М., «Мир», 1968. 112 с.
58. **Fremlin D.** Topological Riesz spaces and measure theory. New York, Cambridge University Press, 1974. 266 p.
59. **Фукс Л.** Частично упорядоченные алгебраические системы. М., «Мир», 1965. 342 с.
60. **Holmes R.** Geometric functional analysis and its applications. Berlin — Heidelberg — New York, Springer, 1975. 246 p.
61. **Christensen J.** Compact convex sets and compact Choquet simplexes.— "Inventiones math.", 1973, v. 19, № 1, p. 1—4.
62. **Шашкин Ю. А.** Выпуклые множества, экстремальные точки, симплексы.— В кн.: Итоги науки. Математический анализ. Т. 11. М., Изд. ВИНИТИ, 1973, с. 5—50.
63. **Шефер X.** Топологические векторные пространства. М., «Мир», 1971. 359 с.
64. **Schaefer H.** Banach lattices and positive operators. Berlin — Heidelberg.— New. York, Springer, 1974. 376 p.
65. **Choquet G.** Lectures on analysis. V. III. N.-Y., Benjamin, 1969. 341 p.
66. **Effros E., Kazdan J.** Applications of Choquet simplexes to elliptic and parabolic boundary value problems.— "J. Diff. Equations", 1970, v. 8, № 1, p. 95—134.
67. **Янг Л.** Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. М., «Мир», 1974. 488 с.
68. **Yau-Chuen-Wong, Ng Kung-Fu.** Partially ordered topological vector spaces. Oxford, Clarendon Press, 1973. 217 p.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глеб Павлович Акилов, Семен Самсонович Кутателадзе

УПОРЯДОЧЕННЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Ответственный редактор
Владимир Александрович Булавский

Редакторы **Т. В. Шалавина, Л. В. Шалина**
Художественный редактор **Т. Ф. Каминина**
Художник **В. В. Растегаев.** Технический редактор **А. В. Семкова**
Корректоры **М. В. Ржевцева, В. Е. Рогова**

Сдано в набор 25.11.77. Подписано к печати 30.06.78. МН-02065. Бумага 84×108 1/32, тип. № 3. Литературная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 19,3. Уч.-изд. л. 20. Тираж 2800 экз. Заказ 780. Цена 2 р. 40 к.

Издательство «Наука», Сибирское отделение. 630099, Новосибирск, 99, Советская, 18.

4-я типография издательства «Наука». 630077, Новосибирск, 77, Станиславского, 25.

ИБ № 9319

2 р. 40 к.

ИЗДАТЕЛЬСТВО „НАУКА"
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ